Trohoida

Neven Elezović, Zagreb

U srednjoškolskoj se matematici velika pozornost pridaje funkcijama i njihovom grafičkom prikazivanju. Pritom se gotovo isključivo razmatraju funkcije zadane eksplicitnom formulom $y = f(x)$. Funkcije zadane u parametarskom obliku gotovo se ne spominju, a pogotovo ne funkcije zadane jednadžbom u polarnom sustavu.

Jasni su povijesni razlozi ovog pristupa. Međutim, danas svedostupna tehnologija poništava dobar dio tih razloga. U nekom budućem kurikulu svakako više pozornosti treba posvetiti drukčijem zadavanju funkcija.

Važnost parametarskog prikaza krivulje vidimo primjerice u jednadžbi kružnice. Parametarski zapis

$$\begin{cases} x = r\sin t \\ y = r\cos t \end{cases}$$

daje nam neusporedivo više informacija o kružnom gibanju u ovisnosti o vremenu t od implicitne jednadžbe kružnice

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

U ovom će članku biti riječi o parametarski zadanim funkcijama, posebice o jednoj zanimljivoj familiji krivulja: **trohoidi** i s njom povezanim krivuljama. Toj je krivulji posvećen opširni *Kutak plus* u udžbeniku [2] za treći razred gimnazije, u poglavlju 4.4. U ovom ćemo članku obraditi teme iz tog kutka, ali s više informacija i detalja.

Cikloida

Cikloida je krivulja koju opisuje točka T na obodu kruga polumjera r koji se kotrlja po pravcu:

Slika 1.

Animaciju ovog gibanja, kao i svih drugih primjera u ovom članku možete pronaći u digitalnoj inačici udžbenika [2].

Vidimo da je ovdje riječ o **funkcionalnoj vezi** jer jednom argumentu x odgovara samo jedna apsci-

prof. dr. sc. Neven Elezović, Fakultet elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, `neven.elezovic@fer.hr`

sa y. Međutim, veza je takva da se ne može napisati u eksplicitnom obliku $y = f(x)$ korištenjem elementarnih funkcija. Zato je parametarski prikaz jedini koji nam preostaje za opisivanje ove krivulje.

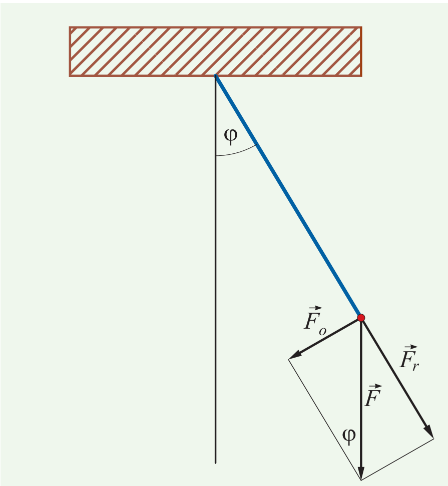
Funkcija f je periodička. Duljina perioda jednaka je opsegu kružnice $2r\pi$. Maksimum funkcije je $2r$ i postiže se u točkama s apscisama $r\pi(1+2k)$, $k \in \mathbf{Z}$. U točkama $x = 2rk\pi$ funkcija ima **šiljak**.

Parametarska jednadžba cikloide glasi

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

i sad nam je jasno zašto je ne možemo prevesti u eksplicitni oblik. Izvod ove jednadžbe napravit ćemo kasnije, u nešto općenitijoj situaciji. Prije toga ćemo navesti tri vrlo zanimljiva problema u čijim rješenjima se javlja cikloida, prema tekstu iz [2]. To ukazuje na važnost ove krivulje.

Matematičko njihalo. Period njihala dan je formulom $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, l je duljina niti njihala, a g gravitacijska konstanta. Međutim, ova formula je samo *približna* i vrijedi samo za malene amplitudne otklone njihala, najviše do $10°$. Objasnimo detaljnije o kakvoj se aproksimaciji radi.



Slika 2.

Njihalo se giba pod utjecajem sile teže $\vec{F}$ čiji je iznos $F = mg$. Ta se sila rastavlja u dvije komponente. Komponenta $\vec{F}_r$ nateže nit, a okomita na nju komponenta $\vec{F}_o$ uzrokuje gibanje. Veličina koju promatramo je kut φ koji zatvara napeto uže s vertikalnom osi. Varijabla je vrijeme t. Po drugom Newtonovu zakonu za kružno gibanje možemo pisati:

$$|\vec{F}_o|l = mgl\sin\varphi = -ml^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

pri čemu je l duljina užeta. Tako dobivamo jednadžbu gibanja koja ne ovisi o masi m utega:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Egzaktno rješavanje ove jednadžbe je poprilično složen problem i rješenje se ne može iskazati elementarnim funkcijama. Međutim, za vrlo male amplitude njihala, kod kojih kut φ ne prelazi $10°$ možemo načiniti aproksimaciju $\sin\varphi \approx \varphi$ i dobiti jednadžbu

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

čije je rješenje

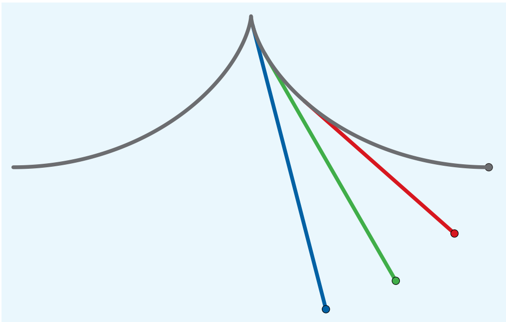
$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right).$$

Ovdje smo pretpostavili da smo njihalo ispustili iz položaja $\varphi = \varphi_0$ početnom brzinom $v = 0$. Odavde dobivamo standardnu formulu za period njihala $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, koje se od točne vrijednosti razlikuje za manje od $0.5\,\%$, uz pretpostavljeni maleni otklon φ_0.

U kakvoj je vezi njihalo s cikloidom? Istražujući problem njihala u potrazi za točnijim satovima nužnim za navigaciju, **Christiaan Huygens** je otkrio da će svako njihalo imati isti period, neovisno o početnom otklonu, ako je njihalo zakačeno u strop oblika (obrnute) cikloide, u njezinom šiljku. Duljina užeta treba biti jednaka $4r$, što je duljina polovine luka cikloide. Duljina slobodne niti njihala stalno se mijenja za vrijeme njihanja i to ima za posljedicu stalnost perioda. Putanja po kojoj se giba masa njihala je također cikloida (evoluta cikloide na stropu). Jednadžba ovog njihala je

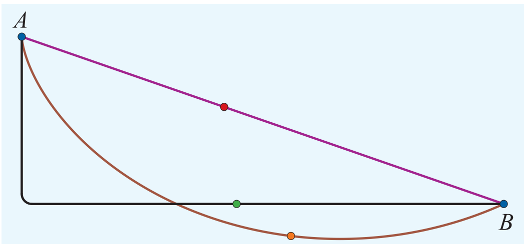
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0,$$

ali izvod te formule je složen i prelazi zamišljene granice ovog članka.



Slika 3.

Problem brahistokrone. Jedan od velikana obitelji Bernoulli, Johan Bernoulli je 1696. postavio sljedeći problem: *Zadane su dvije točke* A *i* B *u vertikalnoj ravnini, poput ovih na slici. Odredi jednadžbu krivulje tako da materijalna točka u polju sile teže prijeđe iz točke* A *u točku* B *po toj krivulji u najkraćem mogućem vremenu.* Rješenje ovog problema ponovno je *cikloida*. Cikloida je obrnuto postavljena, početak puta je u šiljku cikloide.



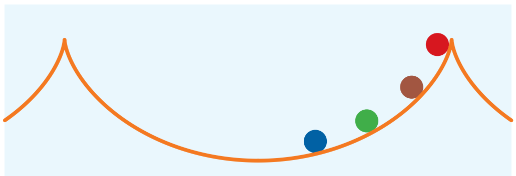
Slika 4.

Ovaj je problem predstavljao veliki izazov najvećim matematičarima tog vremena. U zadanom roku od godinu dana samo petorica su ponudila svoja, uglavnom korektna rješenja. Postavljaču zadatka Johanu Bernoulliju (njegovo rješenje nije bez mana!) svojim su se rješenjima pridružili i njegov brat Jacob Bernoulli, Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Ehrenfried Walther von Tschirnhaus i Guillaume de l'Hôpital. Na rješenju ovog zadatka postavljeni su temelji nove matematičke discipline **varijacijskog računa** koju su poslije razvili Joseph Lagrange i Leonhard Euler.

Rješenje ovog problema brahistokrone i više o povijesti nastanka varijacijskog računa pročitajte u odličnom članku [1].

Problem izokrone krivulje. Povezan s problemom njihala je i problem *izokrone krivulje*. Postoji li krivulja takva da kuglica koja kliže bez trenja po toj krivulji stiže u najnižu točku u istom vremenu, bez obzira iz koje točke krenula? Odgovor je potvrdan, ta je krivulja cikloida.

U posudi oblika cikloide puštamo kuglice koje će se kotrljati pod utjecajem sile teže, bez trenja. Gibanje kuglica bit će *oscilatorno*, a period oscilacije bit će jednak *bez obzira s koje visine se ispusti kuglica*. Ovaj je problem praktički ekvivalentan problemu njihala jer se i kod njihala kuglica njiše opisujući cikloidu.



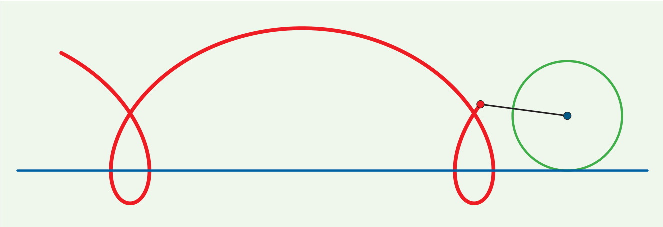
Slika 5.

Animacije ovih triju pokusa pogledajte u digitalnoj inačici udžbenika [2].

Trohoida

Poopćenje cikloide je krivulja koja se naziva **trohoida**. Nju su prvi proučavali Albrecht Dürer 1525. (veliki ilustrator i renesansni umjetnik) i Ole Rømer 1674. (astronom i matematičar koji je prvi izmjerio brzinu svjetlosti). Ime joj dolazi iz starogrčke riječi *trokhos*, kotač.

Zamislimo da je točka T čvrsto povezana sa središtem kruga polumjera r koji se kotrlja po pravcu tako da je njezina udaljenost do središta jednaka d. Trag koji opisuje točka T je trohoida.

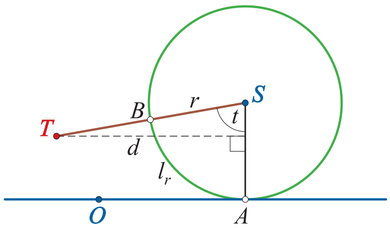


Slika 6.

Za $d = r$ točka se nalazi na obodu kruga, pa je cikloida poseban slučaj trohoide.

Na vlaku koji putuje naprijed neke se točke kreću unazad. Kako je to moguće? Odgovor nam daje trohoida uz vrijednost $d > r$, a točka o kojoj je riječ jest bilo koja s oboda kotača. Te će se točke u jednom trenutku kretati unazad. Ova situacija kod automobila nije moguća.

Izvedimo jednadžbu trohoide.



Slika 7.

Na ovoj slici trohoidu opisuje točka T koja je povezana sa središtem S kruga čvrstom spojnicom duljine d. U početnom položaju krug je dodirivao pravac u točki O. Nakon toga se krug otkotrljao udesno tako da sad dira pravac u točki A. Put koji je krug prevalio je duljina $|OA|$ i ona je jednaka duljini luka l_r na kružnici. (To znači da se u početnom trenutku točka na obodu kruga označena s B podudarala s O.) Označimo s t mjeru kuta AST (u radijanima). Tada vrijedi

$$|OA| = l_r = rt.$$

Označimo koordinate točke T s (x, y). Sa slike vidimo da je

$$x = |OA| - |TP| = rt - d\sin t.$$

Također vrijedi

$$y = |AS| - |SP| = r - d\cos t.$$

Označimo s w omjer duljine d i polumjera r, $d = wr$. Onda za w vrijedi $w > 0$, $w = 1$ odgovara cikloidi, za $w < 1$ točka T je unutar kruga, a za $w > 1$ ona je van kruga. Tako dobivamo parametarsku jednadžbu trohoide:

$$\begin{cases} x = r(t - w\sin t) \\ y = r(1 - w\cos t). \end{cases}$$

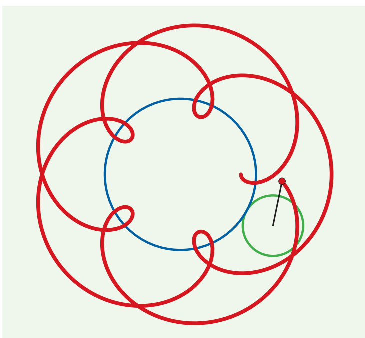
Jedan period trohoide dobivamo za $t \in [0, 2\pi]$.

Epitrohoida i hipotrohoida

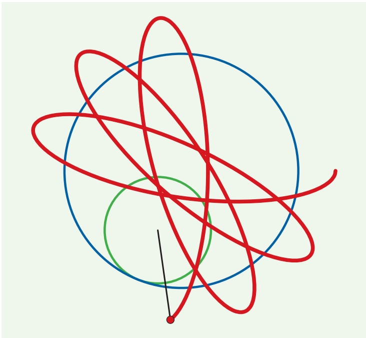
Ako se krug polumjera r koji opisuje krivulju vrti oko većeg kruga polumjera R, onda dobivamo čitavu familiju zanimljivih i lijepih krivulja koje zajedničkim imenom i dalje zovemo **trohoide**. Njihov oblik ovisi o omjeru polumjera dviju kružnica. Označimo taj omjer s k, $R = kr$, pa je $k \geq 1$.

Kao i u prethodnom slučaju, udaljenost točke T do središta manjeg kruga neka je d.

Dobivene krivulje nazivaju se **epitrohoide** ako se krug vrti oko drugog s vanjske strane (slika 8), te **hipotrohoide** ako se on vrti unutar drugog (većeg) kruga (slika 9). Za $d = r$ uobičajena imena su **epicikloida**, odnosno **hipocikloida**.

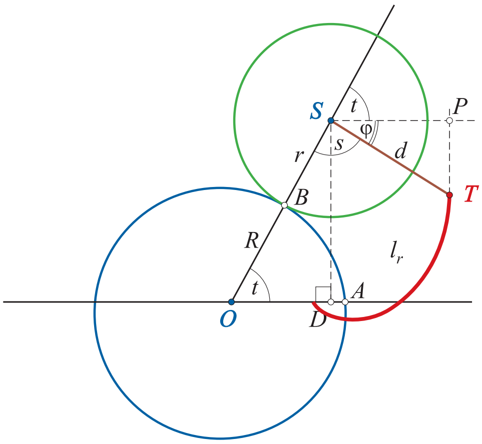


Slika 8.



Slika 9.

Izvedimo jednadžbe općenite trohoide. Promotrimo najprije vrtnju s vanjske strane.



Slika 10.

U početnom trenutku manji i veći krug dirali su se u točki označenoj s A. Nakon toga, manji krug se pomaknuo po većem i došao u položaj na slici. Duljine lukova AB i BC moraju biti jednake, pa vrijedi $Rt = rs$ odakle dobivamo

$$s = \frac{R}{r}t = kt.$$

Za apscisu točke T koja leži na trohoidi vrijedi

$$\begin{aligned} x &= |OD| + |SP| \\ &= (R+r)\cos t + d\cos\varphi \\ &= (R+r)\cos t + d\cos(\pi - t - s) \\ &= (R+r)\cos t - d\cos(t+s) \\ &= r(k+1)\cos t - d\cos(k+1)t. \end{aligned}$$

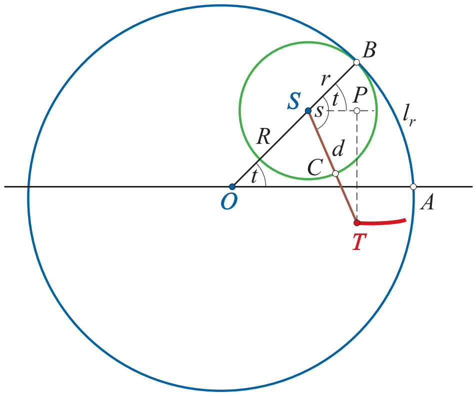
Slično dobivamo

$$\begin{aligned} y &= |DS| - |PT| \\ &= (R+r)\sin t - d\sin\varphi \\ &= r(k+1)\sin t - d\sin(k+1)t. \end{aligned}$$

Dakle, jednadžba epicikloide je

$$\begin{cases} x = r(k+1)\cos t - d\cos(k+1)t \\ y = r(k+1)\sin t - d\sin(k+1)t. \end{cases}$$

Promotrimo sad vrtnju s nutarnje strane.



Slika 11.

Opis točaka je isti kao u prethodnom slučaju. Sad će vrijediti

$$\begin{aligned} x &= (R-r)\cos t + d\cos(s-t) \\ &= r(k-1)\cos t + d\cos(k-1)t \end{aligned}$$

i slično ovom

$$\begin{aligned} y &= (R-r)\sin t - d\sin(s-t) \\ &= r(k-1)\sin t - d\sin(k-1)t. \end{aligned}$$

Zato je jednadžba hipotrohoide

$$\begin{cases} x = r(k-1)\cos t + d\cos(k-1)t \\ y = r(k-1)\sin t - d\sin(k-1)t. \end{cases}$$

Sve se ove krivulje jednostavno crtaju u GeoGebri. U tu je svrhu dovoljno napisati primjerice:

trohoida = Curve$((x(t), y(t)), t, 0, t_{\max})$

gdje umjesto $x(t)$ i $y(t)$ treba napisati prije navedene jednadžbe. Ovdje je $t_{\max} = 2n\pi$, (n je nazivnik racionalnog broja k) ako crtamo kompletnu krivulju. Definiramo li $t_{\max}$ kao slobodnu varijablu, dobit ćemo efekt postupnog crtanja.

Neke poznate krivulje

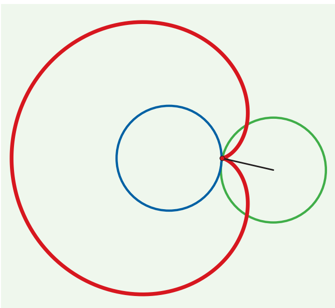
Za neke posebne slučajeve parametara k i w dobit ćemo neke poznate krivulje.

Najprije uočimo da ćemo dobiti zatvorenu krivulju samo ako je omjer polumjera k racionalan broj. U tom će se slučaju manji krug nakon nekoliko obilazaka naći u istom položaju u odnosu na veliki krug.

Primjerice, ako je k cijeli broj, tad će dostajati jedan obilazak oko većeg kruga, a manji će se krug u tom obilasku okrenuti k puta. Ako je $k = \frac{m}{n}$ pri čemu su m i n skraćeni, onda će trebati n obilazaka oko većeg kruga.

Kardioida. Kardioida je epicikloida s parametrima $k = 1$ i $w = 1$:

$$\begin{cases} x = 2r\cos t - r\cos 2t \\ y = 2r\sin t - r\sin 2t. \end{cases}$$



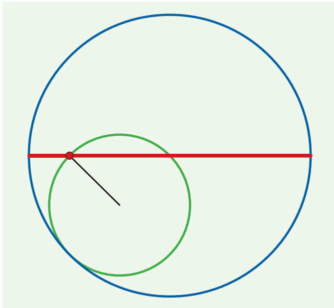
Slika 12.

Kardioida je vrlo zanimljiva krivulja s mnogim svojstvima i svakako zaslužuje detaljniji opis u nekoj drugoj prilici.

Elipsa i segment. Za $k = 2$ hipocikloida postaje elipsa s poluosima $r + d$ i $r - d$:

$$\begin{cases} x = (r+d)\cos t \\ y = (r-d)\sin t. \end{cases}$$

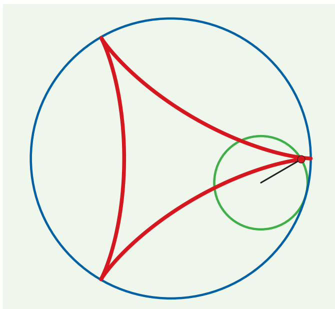
Ako je k tome $w = 1$, odnosno $r = d$, onda jednadžbe glase $x = 2r\cos t$, $y = 0$. To znači da elipsa degenerira u segment, promjer velikog kruga koji se pri jednom obilasku manjeg kruga unutar većeg prevaljuje dvaput.



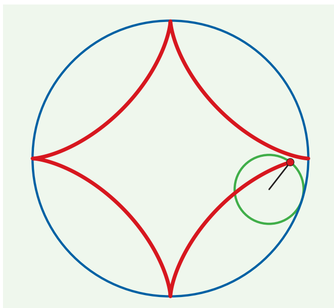
Slika 13.

Ovaj je primjer od iznimne važnosti jer se kružno gibanje malog kruga prevodi u pravocrtno gibanje jedne njegove točke. Girolamo Cardano je 1570. prvi uočio to svojstvo hipocikloide i primijenio ga u poboljšanju tehnike tiskanja knjiga.

Trolist, astroida... Evo još nekoliko krivulja iz ove familije. Dulji popis nalazi se u Panoptikumu.



Slika 14.



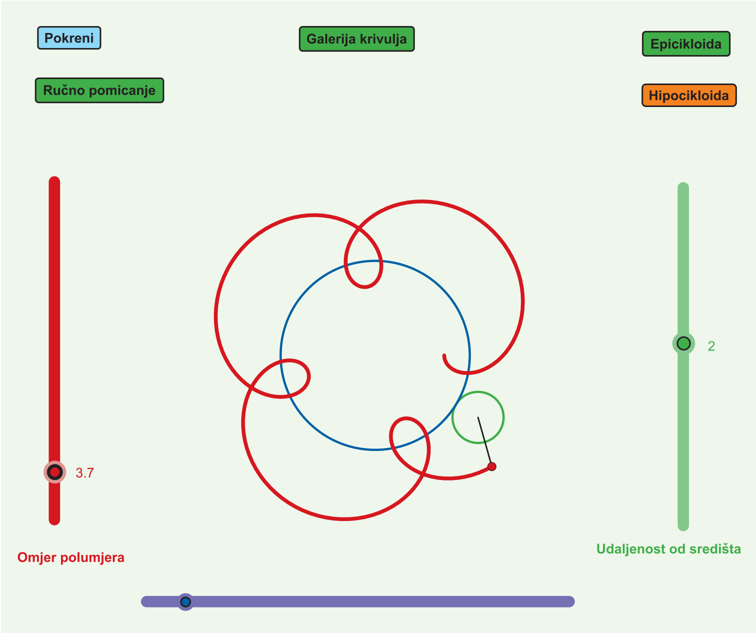
Slika 15.

Sve ovdje nacrtane krivulje generirane su s pomoću GeoGebrina programčića u [2], variranjem različitih parametara. Sličice u Panoptikumu ovog broja MiŠ-a dobivene su na isti način.

LITERATURA

1/ K. Burazin, U. Radojičić (2016.): Uvod u varijacijski račun i njegova povijest, *Osječki matematički list* 16, str. 111–133.

2/ B. Dakić, N. Elezović (2019.): *Matematika 3, udžbenik za 3. razred gimnazija i strukovnih škola (1. dio)*, Element, Zagreb.



Slika 16.

Međunarodni dan matematike

Dragi čitatelji MiŠ-a, i ove će se godine **14. ožujka** širom svijeta proslaviti **Međunarodni dan matematike**.

Svake godine organizatori odabiru novu temu proslave. Tako je za ovu, 2021. godinu, odabrana tema pod naslovom **Matematika za bolji svijet**.

U borbi cijeloga svijeta protiv COVID-19 pandemije matematika nam nudi svoje modele i alate kako bismo razumjeli, promatrali i kontolirali širenje virusa. Matematika se upotrebljava za izradu vremenskih prognoza i priprema nas za prirodne katastrofe. Upozorava nas na klimatske promjene i pomaže nam predvidjeti i ublažiti posljedice tih promjena.

Matematika je temelj učinkovite organizacije društva za dobrobit svih građana. Ona optimizira komunikacijske mreže i transport, omogućava pametno planiranje i vođenje zdravstva, ekonomije i društvenih sustava i organizacija. Znanost i matematika igraju važnu ulogu pri donošenju odluka koje promiču mir i socijalnu pravdu.

Kao jezik koji razumije cijeli planet, matematika je temeljni dio ljudskog kulturnog nasljeđa. Prisutna je u umjetnosti, glazbi i igrama te služi za razonodu i dobrobit čovječanstva.

Više informacija, aktivnosti i izvora koji će vam pomoći da 14. ožujka 2021. proslavite **Matematiku za bolji svijet** potražite na poveznici `https://www.idm314.org/index.html`.