Povijesne crtice
o problemima "viška i manjka" – od kupovine žada do novčića za prosjake

Josip Sliško,
Puebla, Meksiko

Mnogi od problema koji se pojavljuju u udžbenicima matematike stoljećima su se koristili za podučavanje početnika u ovladavanju matematičkim postupcima (Sanford, 1972.; Smith, 1917.; Swetz, 2012.). Neki su problemi tijekom vremena doživljavali manje ili veće promjene u formulacijama, od pretpostavljenog konteksta do korištenih brojevnih vrijednosti. Pojedini su autori željeli pokazati svoju kreativnost umjesto da se koriste postojećim oblikom zadatka. Zbog niza razloga postalo je uobičajeno da se ne spominje tko je i kada prvi formulirao neki problem premda bi takva, zgodno sročena informacija mogla pružiti učenicima početni uvid u važne povijesne, kulturne i ljudske dimenzije bavljenja matematikom (Swetz, 1989.).

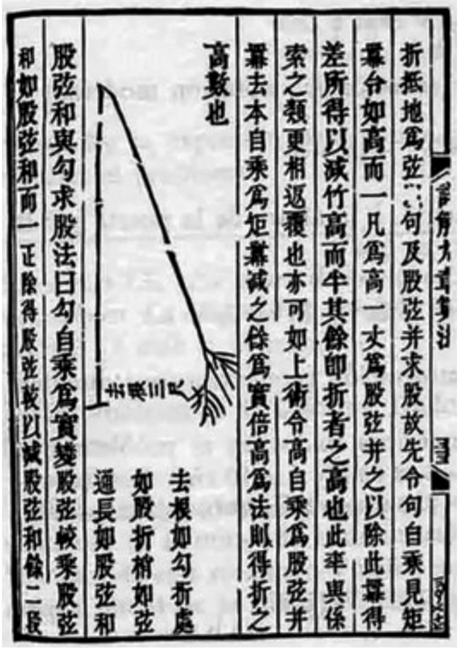
Jedan konkretan primjer izostavljanja informacije o podrijetlu problema slijedi u nastavku.

Bura je prelomila stablo tako da je njegov vrh dodirnuo zemlju na udaljenosti 3 m od podnožja stabla. Na kojoj je visini od tla prelomljeno stablo ako je njegova visina bila 9 m? (Jagodić, Sarapa i Copić, 2007., str. 42.)

Bez povijesnog komentara taj problem je tek jedan u nizu zadataka za rješavanje. Međutim, za razliku od mnogih drugih, u matematičkoj praksi taj problem već postoji više od 2000 godina! Pojavio se prvi put u čuvenom kineskom udžbeniku *Devet poglavlja matematičkog umijeća* (trinaesti problem u devetom poglavlju) koji je napisan ili u drugom ili u prvom stoljeću prije nove ere. U trinaestom stoljeću formulaciju je dopunjavala i prigodna ilustracija (slika 1).

Tijekom vremena "slomljeni bambus" postaje "slomljeno stablo", a problem je služio za vježbanje primjene Pitagorina poučka. Međutim, u zadnje je vrijeme popularnije korištenje trigonometrijskih relacija:

Josip Sliško, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, `josipslisko47@gmail.com`



折抵地爲弦句及股弦并求股故先令句自乘見矩
冪令如高而一凡爲高一丈爲股弦并之以除此冪得
差所得以減竹高而半其餘即折者之高也此率與係
索之類更相返覆也亦可如上術令高自乘爲股弦并
冪去本自乘爲矩冪減之餘爲實倍高爲法則得折之
高數也
股弦和與勾求股法曰勾自乘爲實幷股弦較乘股弦
和如股弦和而一 正除得股弦較以減股弦和餘二股

Slika 1. Ilustracija problema "slomljeni bambus" koja olakšava razumijevanje postupka rješavanja

Vjetar je slomio jedno stablo. Vrh stabla dodiruje tlo na udaljenosti 13 m od debla i čini kut 20° s tlom. Koja je bila početna visina stabla? (Ulrich, 1987., Problem 6, str. 332.).

U ovom se tekstu izlažu neke povijesne crtice o problemima "viška i manjka" koji su se, također, pojavili u *Devet poglavlja matematičkog umijeća*. Za razliku od problema "slomljenog bambusa" tijekom stoljeća pojavio se i nestao niz različitih formulacija problema "viška i manjka". Na kraju je u XVIII. i XIX. stoljeću najveću popularnost stekao problem o darivanju novčića grupi prosjaka koji ima dvije inačice. U prvoj mu nešto novčića ostaje, a u drugoj bi mu nešto novčića nedostajalo. Zbog nejasnih razloga u udžbenicima matematike na engleskom i španjolskom jeziku problemi "viška i manjka" se ne pojavljuju premda oni imaju neosporan potencijal za aritmetičko i algebarsko modeliranje.[1]

Problemi "viška i manjka" u udžbeniku "Devet poglavlja matematičkog umijeća"

Takav tip problema detaljno je razmotren u sedmom poglavlju koje ima naziv "Višak i manjak". Engleski termini su "Excess and deficit" (Kangshen, Crossley & Lun, 1999.), dok su francuski "Excédent et déficit" (Chemla & Shuchun, 2004.). Naziv "višak i manjak" nije najprecizniji jer se u nekim problemima koji se odnose na kupovinu koriste i druge moguće kombinacije. One će u daljnjem tekstu biti jasno navedene.

Od 20 problema, osam se odnosi na situacije u kojima neka grupa osoba zajednički kupuje nešto. Ne navodi se ime novčane jedinice. Slijedi nekoliko primjera u slobodnom prijevodu (u zagradi se navodi tip problema).

Problem 2 (Višak i manjak)

Zajednički se kupuju pilići. Ako svatko da 9, višak je 11. Ako svatko da 6, manjak je 16. Reci koliki je broj kupaca i kolika je cijena pilića. (Odgovor: 9 kupaca, cijena pilića je 70.)

Problem 3 (Višak i manjak)

Zajednički se kupuje žad[2]. Ako svatko da $\frac{1}{2}$, višak je 4. Ako svatko da $\frac{1}{3}$, manjak je 3. Reci koliki je broj kupaca i kolika je cijena žada. (Odgovor: 42 kupca, cijena žada je 17.)

Zanimljivo je da je problem kupovine žada jedini povijesni primjer u kojem se u formulaciji problema koriste razlomci.

Problem 5 (Dvostruki višak)

Zajednički se kupuje zlato. Ako svatko da 400, višak je $3\,400$. Ako svatko da 300, višak je 100. Reci koliki je broj kupaca i koja je cijena zlata. (Odgovor: 33 kupca, cijena zlata je $9\,800$.)

[1] U Hrvatskoj se zadatci ovog tipa mogu pronaći na natjecanjima. Primjerice: "Ako bi učenik kupio 9 bilježnica, ostalo bi mu 50 kn od sume koju je imao. Ako bi želio kupiti 13 bilježnica, nedostajalo bi mu 70 kn. Koliko je kuna imao učenik?" (Regionalno natjecanje iz matematike za 4. razred, Splitska regija, 1993. godine)

[2] Žad je zajednički izraz koji se koristi za dva različita minerala poznata kao *jadeit* i *nefrit*. Najčešće je tamnozelene boje, ali može biti i sivozelenkast ili bijel.

Problem 6 (Dvostruki manjak)

Zajednički se kupuju ovce. Ako svatko da 5, manjak je 45. Ako svatko da 7, manjak je 3. Reci koliki je broj kupaca i koja je cijena ovaca. (Odgovor: 21 kupac, cijena ovaca je 150.)

Problem 7 (Višak i potpuno slaganje)

Zajednički se kupuju svinje. Ako svatko da 100, višak je 100. Ako svatko da 90, to je upravo dovoljno. Reci koliki je broj kupaca i koja je cijena svinja. (Odgovor: 10 kupaca, cijena svinja je 900.)

U engleskom prijevodu (Kangshen, Crossley & Lun, 1999., str. 357) Problem 7 pogrešno je formuliran:

Zajednički se kupuju svinje. Ako svatko da 100, ***manjak*** je 100. Ako svatko da 90, to je upravo dovoljno. Reci koliki je broj kupaca i koja je cijena svinja.

Ako se želi zadržati formulacija s manjkom, onda ona treba glasiti: "Ako svatko da 80, manjak je 100".

Problem 8 (Manjak i potpuno slaganje)

Zajednički se kupuju psi. Ako svatko da 5, manjak je 90. Ako svatko da 50, to je upravo dovoljno. Reci koliki je broj kupaca i koja je cijena pasa. (Odgovor: 2 kupca, cijena pasa je 100.)

Za rješavanje ovih problema korišteno je nekoliko algoritama. Na primjer, za problem kupovine žada cijena žada i broj kupaca dobiju se sljedećim postupkom.

Prvi iznos plaćanja $\left(\frac{1}{2}\right)$ pomnoži se manjkom u drugom plaćanju (3) i na to se dodaje umnožak drugog plaćanja $\left(\frac{1}{3}\right)$ i viška u prvom plaćanju (4). Dobiveni zbroj dijeli se zbrojem viška i manjka $(3+4)$:

$$\frac{3\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{3}}{3+4}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{7}=\frac{\frac{9+8}{6}}{7}=\frac{17}{42}.$$

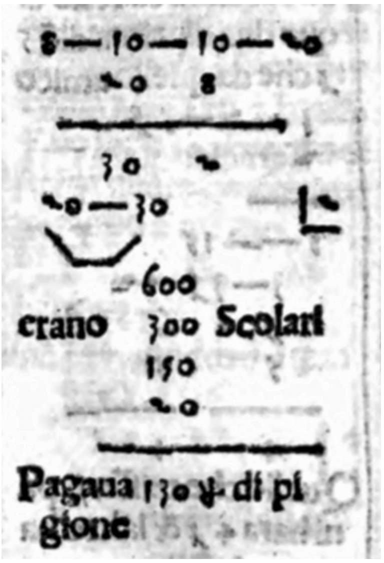
Prema tome cijena žada je 17, a broj kupaca je 42.

Prve inačice problema "viška i manjka" u europskoj matematici

Među prvima je u Europi takav tip problema objavio talijanski matematičar Filippo Calandri 1491. godine. Ako se u slobodnom prijevodu za novčanu jedinicu koristi naziv "novčić", problem bi glasio:

Jedan učitelj ima toliko učenika da kada svakom naplati 8 novčića, nedostaje mu 10 novčića za stanarinu. Ako svaki učenik plati 10 novčića, učitelju bi nakon plaćanja stanarine ostalo 20 novčića. Koliko učenika ima učitelj i kolika mu je stanarina?

Calandri je algoritam rješavanja predstavio na sljedeći način (slika 2):



Slika 2. Algoritam rješavanja koji je predstavio Calandri

Da bi se uočile neke karakteristike tog algoritma, potrebno je znati odgovore na postavljena pitanja. Ako se svakom učeniku naplati 2 novčića više, eliminira se prvobitni manjak od 10 novčića i ostvaruje se višak od 20 novčića, odnosno ukupna promjena je 30 novčića. To znači da je broj učenika 15. Ako svaki od njih plati 10 novčića, učitelj dobije 150 novčića, što mu je dovoljno za stanarinu i još mu ostaje 20 novčića. To znači da je stanarina 130 novčića.

Lako je primijetiti da se u Calandrijevu algoritmu ne pojavljuje eksplicitno da je točan traženi broj učenika (*scolari*) 15. Također nema jasnih indikacija zašto se u algoritmu pojavljuju brojevi 600 i 300. Kako je navedeno da je iznos stanarine (*pigione*) 130 novčića, to znači da učenici plaćaju 150 novčića (130 novčića $+$ 20 novčića), odnosno da ih ima 15.

Korišteni postupak za nalaženje broja učenika i iznosa stanarine u ovom problemu prvi je jasno izložio njemački matematičar Johannes Widmann 1498. godine. On ga je upotrijebio za rješavanje dva problema viška i manjka.

U prvom problemu kupuje se anis (ne navodi se novčana jedinica):

Ako se jedna mjera anisa plati 12, onda ostaje 37. Ako bi se platio 15, onda bi nedostajalo 44. Traži se broj mjera anisa i raspoloživi novac.

Plaćajući 3 više po jednoj mjeri, gubi se 81 ($37 + 44 = 81$). To znači da je broj mjera anisa 27 ($81 : 3 = 27$). Raspoloživi novac je: $(27 \cdot 12) + 37 = (27 \cdot 15) - 44 = 361$.

U drugom problemu plaćaju se radnici (ne navodi se novčana jedinica):

Ako se svakom radniku plati 5, ostaje 11. Ako bi se svakom platilo 9, nedostajalo bi 17. Traži se broj radnika i raspoloživi novac.

Kada se svakom radniku plati 4 više, plaćeni iznos se povećava za 28 ($11 + 17 = 28$). To znači da je broj radnika 7 ($28 : 4 = 7$). Raspoloživi novac je: $(7 \cdot 5) + 11 = (7 \cdot 9) - 17 = 46$.

Glasoviti talijanski matematičar, fizičar i inženjer Niccolo Fontana (slika 3), poznatiji po svom nadimku "Tartaglia" (što znači "mucavac") 1556. godine je u svojoj knjizi o generalnom tretmanu brojeva i mjera (Tartaglia, 1556., str. 253) objavio, jedan za drugim, čak tri problema "viška i manjka".

U jednom od problema kao kontekst koristi se situacija u kojoj se plaćaju radnici, dok se ostala dva problema odnose na situacije kupovine. Tartaglia koristi Widmannov postupak za nalaženje rješenja. Treći problem i njegovo rješenje izloženi su na sljedeći način:

Netko želi kupiti komad tkanine. Ako bi za svaki lakat tkanine platio 4 novčića, ostalo bi mu 60 novčića. Ako bi za svaki lakat tkanine platio 7 novčića, nedostajalo bi mu 90 novčića. Tražim koliko je lakata dugačak komad tkanine i koliko novčića ima kupac.

Zbroji višak i manjak i dobiješ 150. Oduzmi 4 od 7 i dobiješ 3. Podijeli 150 sa 3 i dobiješ 50 i to je dužina tkanine u laktima. Pomnoži 4 sa 50 i dobiješ 200. Dodaj 60 i dobit ćeš 260 i toliko je novčića u džepu.

Slika 3. Niccolo Fontana Tartaglia (1499. – 1557.)

Inačice problema "viška i manjka" u kojima se daje novac siromasima ili prosjacima

Dosad su spomenuta tri konteksta problema "viška i manjka" koje su koristili europski matematičari u XV. i XVI. stoljeću. Prvi je originalni kineski kontekst "kupovina neke potrepštine", a dva nova su "plaćanje radnicima" i "plaćanje učitelja". U svom udžbeniku "Aritmetika u tri knjige" francuski matematičar Jean Trenchant 1558. godine uvodi jedan dodatni kontekst "davanje novca siromasima":

Jedan građanin namjerava ravnomjerno dodijeliti određeni broj novčića nekolicini siromaha. Da bi mogao svakome pokloniti 6 novčića, nedostaje mu 14 novčića. Ako bi svakom poklonio 5 novčića, ostalo bi mu 9 novčića. Koliki je broj siromaha?

Zbroj 14 i 9 je 23. Taj se zbroj podijeli razlikom između 5 i 6 (što je 1). To daje da je broj siromašnih osoba 23.

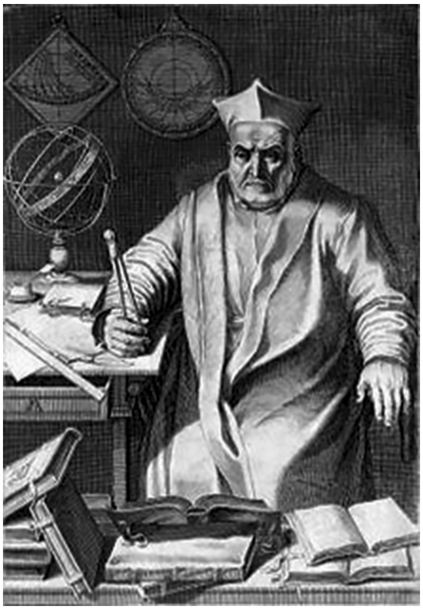
Važno je uočiti da je Trenchant smanjio računsku zahtjevnost problema jer se ne traži raspoloživa suma novca.

Trenchant je kao dodatak naveo i jednu moguću varijaciju problema, pretvarajući ga u već spomenuti kineski tip "dva viška":

Ako se svakom siromahu pokloni 5 novčića, ostaje 19 novčića. Ako se pokloni 7 novčića, ostaju 3 novčića.

Smanjenje viška za 16 $(19 - 3 = 16)$ kad se podijeli sa 2 (što je razlika između 5 i 7) daje 8, a to je broj siromaha.

Sljedeći značajan doprinos problemima "viška i manjka" dao je njemački matematičar i astronom Christoph Clavius (slika 4), ali tek u svojoj drugoj inačici problema.



Slika 4. Christoph Clavius (1538. – 1612.)

U prvoj inačici problema, u knjizi "Kompendij praktične aritmetike" (1583.), koristi kao kontekst situaciju "učenici plaćaju učitelja" koju je već razmatrao Calandri:

Učitelj ima učenike. Ako mu svaki godišnje plati 5 zlatnika, nedostaje mu 30 zlatnika za platiti dom u kojem živi. Ako bi mu svaki učenik platio 6 zlatnika, ostalo bi mu 40 zlatnika nakon plaćanja doma. Koliko ima učenika i koja je cijena doma?

Dobiva da je broj učenika 70, a da je cijena doma 380 zlatnika.

Značajno originalniju inačicu izlaže u svojoj knjizi "Algebra", koja je objavljena 1608. u Rimu. Koristi kao kontekst (možda slijedeći Trenchanta) situaciju u kojoj se daju novčići siromasima:

Jedan građanin sreo je nepoznati broj siromašnih osoba ispred vrata svoje kuće. Svakome od njih dao je 7 novčića. Nakon što je to učinio, u ruci su mu ostala 24 novčića. Da je htio svakom od njih dati 9 novčića, trebala bi mu dodatna 32 novčića. Pita se koliko je siromaha bilo i koliko je novčića građanin imao u svojoj ruci.

Koristeći za broj siromaha izraz "summa", Clavius broj novčića izražava kao "7 summas $+24$". Na isti način, taj broj je i "9 summas -32". Izjednačavajući ta dva izraza, Clavius dobiva: "7 summas $+24 = 9$ summas -32". Dodajući na obje strane 32, nalazi: "7 summas $+56 = 9$ summas". Na kraju se ima: "$56 = 2$ summas".

Na taj način je broj siromaha 28. Broj novčića je $7 \cdot 28 + 24 = 220$. Isti se broj dobije korištenjem druge relacije: $9 \cdot 28 - 32 = 220$.

Danas bismo taj problem zapisali: $7x + 24 = 9x - 32$. Prema tome, može se smatrati da je Clavius bio prvi matematičar koji je jedan problem "viška i manjka" riješio "verbalnom inačicom" algebarskog postupka.

Eksplicitni algebarsko-simbolički tretman problemu dao je Isaac Newton u svojoj "Univerzalnoj aritmetici". Izdanje na latinskom objavljeno je 1707., a engleski prijevod 1720. godine. Četvrti je problem glasio:

Čovjeku koji želi rasporediti nešto novca nekolicini prosjaka nedostaje osam penija da bi dao tri penija svakom od njih. Zbog toga je dao svakom dva penija i preostala su mu tri penija. Treba naći broj prosjaka.

Newtonovo rješenje glasilo je:

Neka broj prosjaka bude x. Kako mu treba 8 penija da bi svima dao $3x$ penija, čovjek ima $(3x - 8)$ penija. Od toga daje $2x$ penija i preostali broj penija $(x - 8)$ je tri. To jest, $x - 8 = 3$ ili $x = 11$.

Važno je napomenuti kako Newton nije tražio da se izračuna broj penija koje je milosrdni čovjek imao.

Pored toga, prvi je siromašne ljude nazvao prosjacima (latinski "mendicus", engleski "beggar") i taj naziv će se koristiti u svim kasnijim i veoma brojnim formulacijama problema u matematičkim udžbenicima na engleskom jeziku.

Apstraktnu algebarsku formulaciju problema "davanja novčića prosjacima" ponudio je engleski matematičar Nicholas Saunderson (slika 5).

Slika 5. Nicholas Saunderson (1682. – 1739.)

Prije izlaganja Saundersonova doprinosa korisno je navesti nekoliko osnovnih elemenata njegovog fascinantnog životopisa. Kad je imao tek godinu dana, zbog malih boginja je ostao slijep. Usprkos toj ogromnoj nedaći uspio je ovladati matematičkim vještinama i Newtonovom fizikom, postati uspješan predavač matematike i 1711. godine dobiti zvanje "Lucasian profesor" na sveučilištu u Cambridgeu. Istu katedru je nekoliko godina ranije držao Newton. Kako Saunderson nije imao formalno sveučilišno obrazovanje, za imenovanje bila je presudna titula "Master of Arts" koju mu je osobno dodijelila kraljica. Ova životna priča može imati veliki motivacijski i argumentativni potencijal u inkluzivnom obrazovanju.

Saunderson izlaže dvije inačice problema. Prva je standardna u kojoj se specificira broj penija u obje situacije davanja:

Srećući skupinu prosjaka, čovjek daje svakom od njih četiri penija i ostaje mu šesnaest penija. Međutim, da je svakom od njih dao šest penija, za tu svrhu bi mu trebalo dodatnih dvanaest penija. Traži se broj prosjaka.

Odgovor: 14 jer je $14 \cdot 4 + 16 = 72 = 14 \cdot 6 - 12$. (Saunderson, 1740., Problem 35, str. 112.)

Saundersovo rješenje koje obrazlaže ponuđeni odgovor glasi:

Stavi x za broj osoba. Tada, ako on svakom da četiri penija, broj danih penija bit će četiri puta veći od broja osoba, tj. $4x$. Zbog toga će $4x + 16$ izraziti sav novac koji je imao pri sebi. To će, također, biti $6x - 12$ istim načinom razmišljanja. Zbog toga je $4x + 16 = 6x - 12$. Slijedi $16 = 6x - 4x - 12 = 2x - 12$ ili $2x = 16 + 12 = 28$ i x, broj osoba jednak je 14, kao (što je već rečeno) ranije. (Sanderson, 1740., str. 113.)

Važno je napomenuti da Saunderson, iako ne traži izravno da se nađe broj penija koje je imao milosrdan čovjek, taj broj koristi kako bi pokazao da je traženi broj prosjaka točan. Naravno, izjednačavanje početnog broja penija u obje zamišljene situacije osnova je za algebarsko nalaženje traženog broja prosjaka.

Saundersonova generalna formulacija problema glasila je:

Srećući skupinu prosjaka, čovjek daje svakom od njih p penija i ostaje mu a penija. Međutim, da je svakom od njih dao q penija, za tu svrhu bi mu trebalo dodatnih b penija. Koliko je bilo prosjaka? (Saunderson, 1740., Problem 6, str. 222.)

Koriteći se simbolom x za broj prosjaka i jednakosti $qx - b = px + a$, Saunderson nalazi rješenje u obliku:

$$x = \frac{a+b}{q-p}.$$

U nastavku Saunderson daje algebarski dokaz o točnosti pronađenog broja prosjaka.

Zahvaljujući Saundersonu, problem "viška i manjka" kontekstualiziran u situaciju u kojoj se daju novčići prosjacima, postao je jedan od najpopularnijih problema u udžbenicima algebre i aritmetike u XIX. stoljeću. U to se lako uvjeriti ako se u pretraživač knjiga "books.google.com" upiše "how many beggars were there".

Međutim, jako je malo udžbenika iz XX. i XXI. stoljeća koji ga koriste. Možda je razlog "dušobrižnička" ideja pojedinih socijalnih grupa kako nije uputno davati novac prosjacima jer ih tako "osuđujemo" da stalno ostanu na ulici umjesto da pokušaju naći bolje putove u životu. Treba dodati da su druge spomenute kontekstualizacije problema "viška i manjka" nestale iz matematičkih udžbenika već u XVII. stoljeću.

Mogu li problemi "viška i manjka" biti korisni u nastavi matematike?

Uzimajući u obzir njihovu povijesnu važnost, odgovor je definitivno potvrdan. To se izgleda počinje shvaćati u Singaporeu gdje su problemi "viška i manjka" postali veoma popularni (potražiti na YouTubeu "excess and shortage problems"). Posebno aktivan promotor tih problema je Terry Chew. On ih uključuje u svoje knjige, kako za samostalno učenje i rješavanje zahtjevnih matematičkih problema (Chew, 2008.) tako i za pripremanje za sudjelovanje na matematičkim olimpijadama (Chew, 2007.). Zanimljivo je da ih Chew namijenjuje učenicima trećeg i četvrtog razreda osnovne škole!

Međutim, pedagoški pristup kojim se koristi Chew nije primjeren. Naime, on prvo ponudi algoritamski postupak rješavanja u jednom primjeru problema, a onda učenici vježbaju primjenu ponuđenog postupka rješavanja na istom tipu problema samo s izmijenjenim kontekstima i brojevima. Sličnu pedagošku pogrešku ponovio je u svom mikroistraživanju Schwartz (2008.a; 2008.b).

Mnogo bi produktivnije bilo davati učenicima probleme "viška i manjka" bez prethodno ponuđenog algoritamskog postupka rješavanja.

Ako se radi o učenicima koji su već trebali vladati algebarskim modeliranjem, bit će zanimljivo vidjeti kako ga primjenjuju. Oni koji budu uspješni, sigurno će se dobro osjećati ako im se kaže da je vrhunskim matematičarima bilo potrebno puno stoljeća kako bi "došli" do takvog algebarskog rješenja.

U slučaju mlađih učenika bez algebarskog predznanja, problemi "viška i manjka" omogućuju poticanje njihove matematičke kreativnosti koja često zna biti ugodno nastavno iskustvo. Preporučljivo je koristiti se zadatcima u kojima traženi brojevi nisu veliki.

LITERATURA

1/ K. Chemla, G. Shuchun (2004.): *Les neuf chapitres*, Dunod.

2/ T. Chew (2007.): *Maths Olympiad. Unleash the maths olympian in you!*, Singapore Asian Publications.

3/ T. Chew (2008.): *Singapore Math Challenge. Grade 3+*, Thinking Kids.

4/ B. Jagodić, N. Sarapa, B. Copić (2007.): *Matematika 8. Zbirka zadataka za 8. razred osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb.

5/ S. Kangshen, J. N. Crossley, A. W. C. Lun (1999.): *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary*, Oxford University Press.

6/ V. Sanford (1972.): *The History and Significance of Certain Standard Problems in Algebra*, New Work: AMS Press. Reprint originalnog izdanja objavljenog kod College Press (New York) 1927.

7/ N. Saunderson (1740.): *The elements of algebra, in ten books*, Cambridge University Press.

8/ R. Schwartz (2008.a): A classic from China: The Nine Chapters, *The Right Angle*, 16 (2), 8–12.

9/ R. Schwartz (2008.b): Students explore The Nine Chapters from China, *The Right Angle*, 16 (4), 6–8.

10/ F. J. Swetz (1989.): Using Problems from the History of Mathematics in Classroom, *The Mathematics Teacher*, 82 (5), 370–377.

11/ F. J. Swetz (2012.): *Mathematical expeditions: Exploring word problems across the ages*, John Hopkins University Press.

12/ D. E. Smith (1917.): On the origin of certain typical problems, *The American Mathematical Monthly*, 24 (2), 64–71.

13/ N. Tartaglia (1556.): *La primera parte del general trattato di numeri et misure*, Curtio Troiano dei Nauo.

14/ F. J. Ulrich (1987.): *HBJ geometry*, Harcourt Brace Jovanovich.