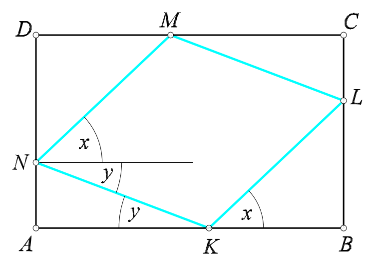
Zanimljiv dokaz adicijskog teorema sinusa

Antun Ivanković, Ilok

U srednjoškolskim udžbenicima adicijske se formule za funkcije sinus i kosinus najčešće izvode uz oslanjanje na definicije tih funkcija na brojevnoj kružnici. Također je vrlo jednostavan izvod formula za kosinus zbroja i razlike pomoću skalarnog umnoška vektora, a taj bi izvod bilo dobro prikazati u nastavi uz obradu teme *Vektori* kao jednu od lijepih ilustracija primjene skalarnog umnoška.

No, evo jednog elementaranog dokaza adicijskog teorema sinusa koji nisam susretao u srednjoškolskim udžbenicima, pa mislim da će biti zanimljiv čitateljima MŠ-a.

Promatrajmo romb sa stranicom jedinične duljine, čiji jedan kut ima vrijednost $x+y$. Ovaj kut može biti manji, jednak ili veći od pravog kuta. U ovome dokazu to nema značaja. Opišimo rombu pravokutnik tako da jedna stranica pravokutnika zaklapa sa susjednim stranicama romba kut x, odnosno y kako je prikazano na slici.



Neka je $\sphericalangle KNM = x + y$, pa prema tome $\sphericalangle BKL = x$, a $\sphericalangle AKN = y$. Budući da je stranica romba duljine 1, lako zaključujemo da je njegova površina

$$P = \sin(x + y),$$

a isto tako da su duljine stranica $\overline{AB}$, odnosno $\overline{CD}$ jednake $\cos x+\cos y$ (jer je $|AK| = \cos y$, $|KB| = \cos x$), a stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ $\sin x+\sin y$ (jer je $|AN| = \sin y$, $|BL| = \sin x$), pa je površina pravokutnika

$$P_1 = (\sin x + \sin y)(\cos x + \cos y).$$

Zbroj površina trokuta "okolo" romba (ima ih četiri, dva i dva su sukladna) je

$$P_2 = \sin x \cos x + \sin y \cos y,$$

te je površina samoga romba jednaka

$$P = P_1 - P_2.$$

Nadalje, imamo:

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= (\sin x + \sin y)(\cos x + \cos y)\\ &\quad - (\sin x \cos x + \sin y \cos y).\end{aligned}$$

Množeći i reducirajući taj izraz dobivamo adicijsku formulu sinusa zbroja, tj.

$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y.$$

Ako je $x = y$, imamo romb sa četiri sukladna trokuta površine $\frac{1}{2}\sin x \cos x$, tj. trigonometrijski identitet

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Koristeći komplementarnost sinusa i kosinusa dobivamo adicijski teorem kosinusa zbroja:

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \sin[\frac{\pi}{2} - (x+y)]\\ &= \sin[(\frac{\pi}{2} - x) + (-y)]\\ &= \sin(\frac{\pi}{2} - x)\cos(-y)\\ &\qquad + \sin(-y)\cos(\frac{\pi}{2} - x)\\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y.\end{aligned}$$

Zamjenjujući x sa $-x$, a y sa $-y$, te koristeći parnost i neparnost dobivamo adicijske formule i za razlike.

antun.ivankovic@vk.hinet.hr