Matematika u hanojskim tornjevima

Andrea Katarić, Zagreb

U središtu cijelog svemira, u hramu Benares, bog Brahma je na bakreno postolje postavio tri vrlo duga dijamantna klina. Na prvom se nalaze 64 zlatna diska različitih veličina. Poredani su jedan na drugi od najvećeg prema najmanjem, pri čemu je najveći na dnu. Svećenicima je dao zadatak da neprestano pomiču diskove dok ih sve, u istom poretku, ne prebace na treći klin. Diskove smiju pomicati jedan po jedan tako da uvijek manji disk stavljaju na veći. Kad završe prebacivanje diskova, Zemlja će se pretvoriti u prašinu, a svemir će nestati. Ako svećenici pomiču 1 disk po sekundi, očekuje li nas smak svijeta u skoroj budućnosti?

Ovu legendu prvi put spominje francuski matematičar Eduardo Lucas u svom djelu *Rècrèations Mathèmatiques* 1883. godine[1]. Mozgalica ima nekoliko naziva, brahmanski tornjevi (prema opisanoj legendi), Lucasovi tornjevi (prema Lucasu) te najpoznatiji naziv hanojski tornjevi (prema gradu Hanoiu u Vijetnamu).

Lucasovu mozgalicu prenosimo u cijelosti. Postavljena su tri štapa (klina), možemo ih nazvati A, B i C redom (slijeva nadesno). Na štapu A nalazi se n diskova različitih veličina koji su poredani od najvećeg prema najmanjem tako da je najveći na dnu, a najmanji na vrhu. Cilj je prebaciti sve diskove na štap C tako da oni budu u istom poretku kao na početku (od najvećeg prema najmanjem). Pri prebacivanju trebaju se poštivati dva pravila:

1. u svakom potezu smije se pomaknuti samo jedan disk
2. smije se staviti jedino manji disk na veći, nikako obratno.

Najjednostavnija inačica mozgalice sastoji se od triju diskova, a što ih je više, mozgalica postaje složenija. Mozgalicu možete rješavati na

Andrea Katarić, mag. educ. math., Element d.o.o., Zagreb, andrea@element.hr

[1] E. Lucas (1842. – 1891.) francuski je matematičar koji je dao velik doprinos teoriji brojeva. Svoje studente često je zabavljao matematičkim zagonetkama.

sljedećoj poveznici gdje je moguće odabrati od 3 do 8 diskova: `http://www.matematika-fizika.com/nizirazredi/hanojskitornjevi.html`. U nastavku su dane neke matematičke teme u kojima se može iskoristiti ova mozgalica.

Matematička indukcija

Kao dodatni izazov u mozgalici, postavimo uvjet da diskove s klina A na klin C treba prebaciti u što je moguće manje poteza.

Promotrimo prvih nekoliko slučajeva, od kojih su prva dva trivijalna. Za $n = 1$ potreban je samo 1 potez. Za $n = 2$ potrebna su 3 poteza – najmanji disk stavimo s klina A na klin B, zatim najveći s klina A na klin C pa najmanji na klin C.

Ako imamo 3 diska, bit će potrebno najmanje 7 poteza. Najmanji disk stavljamo na klin C pa srednji na klin B, zatim najmanji na klin B pa najveći na klin C. Nakon toga najmanji disk postavljamo na klin A, srednji na klin C te najmanji na klin C.

Za $n = 4$ bit će potrebno najmanje 15 poteza. Ako bolje promotrimo, u donjoj tablici možemo uočiti pravilnost u nizu najmanje potrebnih poteza. Vrijede li pravilnosti i općenito, za bilo koji broj diskova?

broj diskova n	najmanji broj poteza T_n	drukčiji zapis T_n
1	$1 = 2^1 - 1$	1
2	$3 = 2^2 - 1$	$2 \cdot 1 + 1$
3	$7 = 2^3 - 1$	$2 \cdot 3 + 1$
4	$15 = 2^4 - 1$	$2 \cdot 7 + 1$

U drugom stupcu može se naslutiti formula $T_n = 2^n - 1$. U trećem stupcu T_n je zapisano na drukčiji način, rekurzivnom formulom $T_n = 2T_{n-1} + 1$ pri čemu je $T_1 = 1$.

Posljednja rekurzija pomoći će nam u boljem shvaćanju strategije igre. Možemo ju zapisati kao $T_n = T_{n-1} + 1 + T_{n-1}$. Iz ovako zapisane rekurzije slijedi da je za slaganje n diskova potrebno premjestiti $n - 1$ gornjih diskova na klin B, zatim najveći disk na klin C, za što je potreban jedan potez. Na kraju $n - 1$ gornjih diskova premještamo s klina B na klin C.

Iskoristimo sad ovaj način razmišljanja za dokazivanje formule $T_n = 2^n - 1$ matematičkom indukcijom.

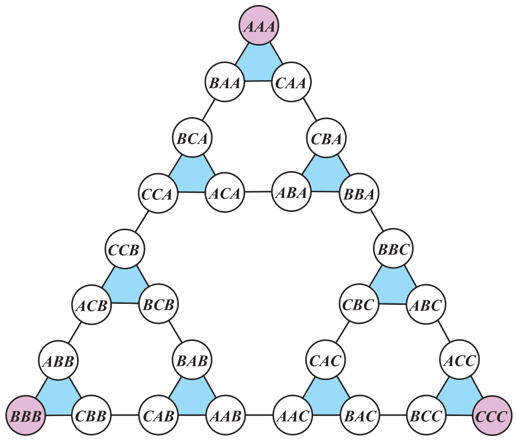
Za $n = 1$ dobivamo $2^1 - 1 = 1$ pa baza indukcije vrijedi. Pretpostavimo da je za n diskova potrebno $2^n - 1$ poteza. Koliko je poteza potrebno za $n + 1$ disk? Da bismo pomaknuli $n + 1$ disk, prvo trebamo pomaknuti n diskova, za što će biti potrebno $2^n - 1$ poteza (po pretpostavci). Nakon toga pomičemo najveći disk, a za to je potreban 1 potez. Tad ponovno pomičemo n diskova na najveći disk (s klina B na klin C), za to je potrebno $2^n - 1$ poteza. Ukupan broj poteza je $(2^n - 1) + 1 + (2n - 1) = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$. Prema principu matematičke indukcije, formula vrijedi.

Odgovorimo na pitanje iz uvoda. Svećenici će trebati najmanje $2^{64} - 1$ potez, a za to će im trebati $2^{64} - 1$ sekunda. Pretvoreno u godine, to iznosi 585 milijarda godina. Starost Zemlje procijenjena je na 4.54 milijarde godina, dok je starost svemira 13.8 milijarda godina, pa nam ostaje još sasvim dovoljno vremena.

Grafički prikaz rješavanja hanojskih tornjeva

Prikažimo s pomoću stabla sve moguće poteze tijekom rješavanja mozgalice s 3 diska. Koristit ćemo se skraćenim zapisima s tri slova A, B i C koja će predstavljati klinove. Primjerice, zapis BCA znači da se najmanji disk nalazi na klinu B (klin u sredini), srednji disk na klinu C (desni klin), a najveći disk na klinu A (prvi disk).

Promotrimo grafički prikaz (slika 1). Na početku se sva tri diska nalaze na klinu A. U prvom potezu dvije su mogućnosti ili ćemo najmanji disk prebaciti na klin B ili ćemo ga prebaciti na klin C. Ako smo odabrali drugu mogućnost (CAA), tad u sljedećem potezu možemo najmanji disk prebaciti na klin B (BAA) ili možemo srednji disk prebaciti na klin B (CBA). Ako smo odabrali tu mogućnost, jedino što možemo napraviti u idućem potezu jest ili prebaciti najmanji disk na klin A ili prebaciti najmanji disk na klin B itd.



Slika 1. Grafički prikaz svih mogućih poteza prilikom rješavanja mozgalice s 3 diska

Na grafičkom prikazu su linijama istaknute veze između pojedinih pozicija diskova. Veze su istaknute samo između pozicija kad se iz jedne može doći do druge. Tako se na primjer ne može u jednom potezu doći iz pozicije BBA na BCB. Uz to možemo primijetiti kako se iz svake pozicije diskova može doći u bilo koju drugu poziciju u određenom broju poteza.

Iz grafičkog prikaza lako je ustanoviti kako doći do rješenja u najmanje poteza. Potrebno je samo slijediti poteze koji su istaknuti na stranici trokuta koja povezuje AAA i CCC (najkraći put od AAA do CCC).

Strategija rješavanja mozgalice

Pogledajmo strategiju rješavanja mozgalice koja se može naslutiti iz grafičkog prikaza. Najmanji disk premješta se u svakom drugom potezu. Razlog je taj što se s većim diskovima ne mogu napraviti dva poteza zaredom jer se nijedan od njih ne može staviti na klin s najmanjim diskom. Kad napravimo potez s najmanjim diskom, treba napraviti potez s jednim od preostalih. Jedini potez koji u tom slučaju možemo napraviti jest da manji od preostalih diskova stavimo na veći. Nakon toga ponovno premještamo najmanji disk. On može ići na dvije pozicije, no samo jedna je ispravna (analiza igre pokazuje da se gibanje najmanjeg diska uvijek obavlja u cikličkim premještanjima).

Algoritam za rješavanje mozgalice u najmanje poteza u ovom slučaju je sljedeći (valjan potez znači da se manji disk stavlja na veći):

1. napraviti valjan potez između klinova A i C
2. napraviti valjan potez između klinova A i B
3. napraviti valjan potez između klinova B i C.

Postupak ponavljamo dok ne dođemo do rješenja. Ovaj postupak bit će primjenjiv za bilo koji neparan broj diskova.

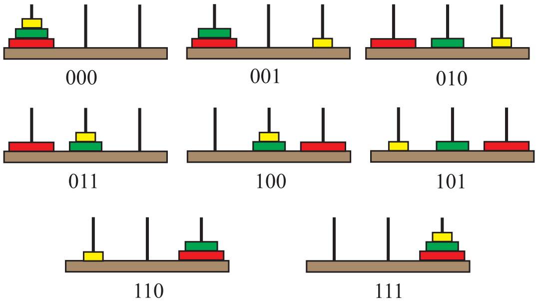
Za paran broj diskova algoritam je:

1. napraviti valjan potez između klinova A i B
2. napraviti valjan potez između klinova A i C
3. napraviti valjan potez između klinova B i C.

Još jedna zanimljivost koju možemo uočiti jest da su iz svake pozicije moguća tri poteza, osim u tri slučaja. Razlog je sljedeći. Iz svake pozicije imamo dvije mogućnosti za pomicanje najmanjeg diska te jednu mogućnost za pomicanje diska manjeg od preostalih. To nije moguće jedino u slučaju kad su sva tri diska na istom klinu.

Binarni brojevni sustav

Drugi način na koji se može zapamtiti algoritam rješavanja hanojskih tornjeva je s pomoću brojenja u binarnom brojevnom sustavu. Potrebno nam je onoliko znamenaka koliko je diskova. Ako su zadana tri diska, tad je početna pozicija zapisana kao 000. Znamenka skroz desno predstavlja najmanji disk, u sredini srednji disk, a lijeva znamenka predstavlja najveći disk. Kad se zadnja znamenka mijenja iz nule u jedinicu, tad najmanji disk pomičemo s prvog klina na treći ili s drugog na prvi ili s trećeg na drugi (pomiče se "ulijevo"). Kad se druga znamenka mijenja iz nule u jedinicu, tad drugi disk pomičemo tamo gdje se može pomaknuti. Kad se mijenja prva znamenka, tad se najveći disk premješta tamo gdje je moguće. Potezi su prikazani na slici 2.



Slika 2. Rješavanje mozgalice s 3 diska i binrani brojevni sustav.

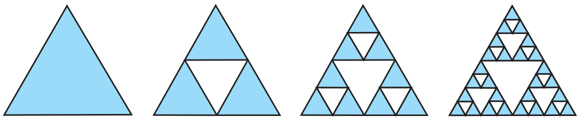
Ova strategija primjenjiva je za bilo koji neparan broj diskova. No slično se postupa i ako je broj diskova paran. Jedina razlika je što ćemo u tom slučaju prilikom promjene znamenke koja predstavlja najmanji disk, taj disk pomicati "udesno". Odnosno, s prvog klina na drugi, s drugog na treći te s trećeg na prvi.

Iz ove strategije također je vidljiv najmanji broj poteza za rješavanje mozgalice. U binarnom brojevnom sustavu brojili smo redom do broja 111, što je u dekadskom sustavu jednako 7. Ako su dana četiri diska, završna pozicija je 1111, što je broj 15 u dekadskom sustavu itd.

Trokut Sierpinskog

Postoji i veza između hanojskih tornjeva i trokuta Sierpinskog. Trokut Sierpinskog kreiramo tako da iz jednakostraničnog trokuta izuzmemo središnji dio, odnosno trokut čiji su vrhovi polovišta stranica početnog trokuta. Time dobivamo tri sukladna trokuta koja su slična početnom trokutu. Opisani postupak nastavljamo s trima dobivenim trokutima čime dobivamo 27 novih trokuta i tako dalje.

Vratimo se na grafički prikaz rješavanja hanojskih tornjeva koji smo već vidjeli (slika 1). Rješavanje mozgalice s tri diska izgleda kao i treća iteracija u trokutu Sierpinskog. Grafički prikaz rješavanja



Slika 3. Nastajanje trokuta Sierpinskog.

mozgalice s 4 diska izgledao bi kao četvrta iteracija u trokutu Sierpinskog itd.

Druge inačice mozgalice

Za kraj spomenimo i neke druge inačice hanojskih tornjeva koje su proizišle iz opisane. Umjesto triju klinova, mogu se staviti četiri. Osim toga, klinovi se mogu poredati u krug pri čemu je dozvoljeno pomicanje diskova jedino u smjeru kazaljke na satu.

Diskovi u magnetskim hanojskim tornjevima imaju dvije različite strane (crvena koja predstavlja sjever i plava koja predstavlja jug). Disk koji se premješta mora se okrenuti, a pritom se može staviti jedino crvena strana na plavu i obratno.

U dvobojnom hanojskom tornju svaki je disk dan u dvije boje, crnoj i bijeloj. Na početku su diskovi poslagani na dva klina tako da se boje izmjenjuju. Primjerice, na prvom klinu je najveći disk bijele boje, zatim slijedi crni pa bijeli itd. dok je na drugom klinu obrnuto. Cilj je dobiti dva tornja, jedan s bijelim diskovima, a drugi s crnim.

Više o različitim inačicama hanojskih tornjeva možete pročitati na poveznicama [2], [4] i [5].

LITERATURA

1/ N. Elezović (2017.): *Diskontna matematika 1*, Element, Zagreb.

2/ Wikipedia, *Tower of Hanoi*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi`

3/ 3Blue1Brown, *Binary, Hanoi and Sierpinski*, `https://www.youtube.com/watć?v=2SUvWfNJSsM&ab_channel=3Blue1Bron`

4/ P. K. Stockmeyer, F. Lunnon: *New variations on the tower of Hanoi*, `http://www.cs.wm.edu/~pkstoc/greece.pdf`

5/ S. Mneimneh: *Simple Variations of the Tower of Hanoi to Guide the Study of Recurrences and Proofs by Induction*, `http://www.cs.hunter.cuny.edu/~saad/teaching/ToH.pdf`