Kružnice

Luka Banović, Rijeka

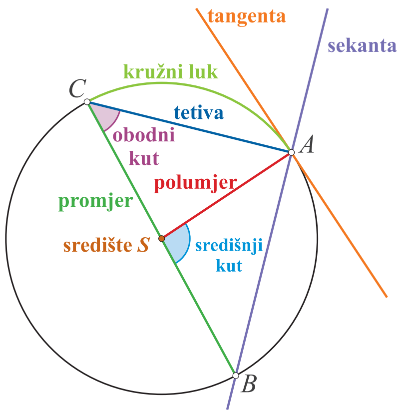
Uvod

U ovom članku dotaknut ćemo se nekih od najvažnijih činjenica i strategija kod rješavanja zadataka koji uključuju kružnice na matematičkim natjecanjima u završnim razredima osnovne i u srednjoj školi. U trenutku kad se učenici prvi puta ozbiljno susretnu s ovakvim tipovima zadataka u 7. razredu često se u njima teže snalaze. Stoga je glavna ideja ovog članka pokušati objediniti poučak o obodnom i središnjem kutu i njegove posljedice te neke osnovne činjenice o tetivnim četverokutima koje se prikladno nadovezuju na to. Prvi dio članka prvenstveno je namijenjen za osnovnu školu i obavezan je preduvjet za svakog srednjoškolca koji želi naučiti ponešto o tetivnim četverokutima (zato će se i naći poneki teži zadatak). Drugi dio članka prvenstveno je pisan za srednju školu. Kako zadatci ne zahtijevaju nikakvo znanje srednjoškolske matematike izuzev onoga čime se ovaj članak bavi, prikladni su i za zainteresirane osnovnoškolce.

Luka Banović, Udruga Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić", Zagreb, `mnm@mnm.hr`

Središnji i obodni kut

Za početak ćemo ukratko ponoviti sve najosnovnije pojmove vezane za ovu tematiku. **Kružnica** je skup svih točaka ravnine jednako udaljenih od jedne konkretne točke koju zovemo **središte kružnice**. Udaljenost središta kružnice od točaka na kružnici



Slika 1. Osnovni pojmovi

zovemo **polumjer (radijus) kružnice**. Polumjer također često označava i dužinu koja spaja središte kružnice s nekom točkom na kružnici. Slično tome, **promjer (dijametar) kružnice** može označavati i dužinu koja spaja dvije najudaljenije (nasuprotne) točke na kružnici koja prolazi kroz njezino središte, kao i udaljenost tih dviju točaka koja je pritom dvaput veća od radijusa te kružnice. **Tetiva** je naziv za bilo koju dužinu kojoj su krajevi točke kružnice. Pravac koji dira kružnicu u jednoj točki zovemo **tangenta**, dok je **sekanta** naziv za pravac koji siječe kružnicu u dvjema točkama. **Kružni luk** je naziv za dio kružnice između dviju točaka kružnice.

Sada ćemo definirati središnje pojmove ovog poglavlja. Neka je dana kružnica čije središte označimo sa S, te neka su točke A, B i C dane kao na slici 1. **Središnji kut nad lukom $\overset{\frown}{AB}$** je u našim oznakama kut $\sphericalangle BSA$, tj. kut koji zatvaraju polumjeri kružnice $\overline{SA}$ i $\overline{SB}$. **Obodni kut nad lukom $\overset{\frown}{AB}$** je primjerice kut $\sphericalangle BCA$ sa slike. Općenito se točka C može nalaziti bilo gdje na kružnici i za svaki izbor točke C dobivamo jedan obodni kut. No, za potrebe iskaza sljedećeg važnog teorema podrazumijevat ćemo da je obodni kut nad lukom $\overset{\frown}{AB}$ samo onaj za koji se točka C i središte kružnice nalaze s iste strane pravca AB.

Teorem 1. (o obodnom i središnjem kutu) *Središnji kut nad lukom kružnice jednak je dvostrukom obodnom kutu nad tim lukom.*

Dokaz teorema je nestandardan u odnosu na uobičajene dokaze i zadatke u geometriji s kojima se učenici susreću u osnovnoj školi, budući da se temelji na rastavljanju na slučajeve. Dokaz se može naći npr. u [2]. Iz ovog teorema direktno slijedi da su **svi obodni kutovi nad istim lukom sukladni**, budući da je svaki obodni kut dvostruko veći od središnjeg, a središnji kut za isti luk je jedinstven.

Specijalni slučaj teorema o obodnom i središnjem kutu je Talesov teorem. Tvrdnju teorema dobijemo kad za luk nad kojim promatramo obodni i središnji kut uzmemo polukružnicu. Uočimo da je središnji kut pritom točno jednak $180°$ te ovdje umjesto izraza “obodni kut nad lukom” uobičajeno govorimo o obodnom kutu nad promjerom kružnice.

Teorem 2. (Tales) *Svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi. Vrijedi i obrat, tj. ako su točke A, B i C na kružnici postavljene tako da je $\sphericalangle ACB$ pravi, tada je dužina $\overline{AB}$ promjer te kružnice.*

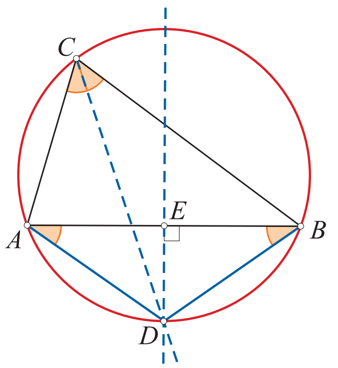
Napomenimo da obrat Talesova teorema slijedi iz osnovnih svojstava pravokutnog trokuta $\triangle ABC$, za kojeg znamo da je polovište hipotenuze jednako udaljeno od svih vrhova tog trokuta. Slijedi vrlo važan primjer.

Primjer 1. (kut između tetive i tangente) Pokažimo da je kut između tetive kružnice $\overline{AB}$ i tangente na tu kružnicu u jednoj od krajnjih točaka tetive jednak obodnom kutu nad lukom $\overset{\frown}{AB}$. Ovu tvrdnju korisno je imati na umu budući da se nerijetko pojavljuje u zadatcima, pogotovo na srednjoškolskim natjecanjima.

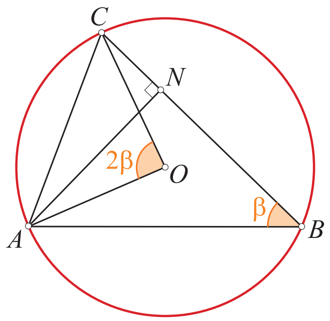
Držimo se oznaka sa slike 1. Tvrdnju ćemo pokazati za tetivu $\overline{AB}$ i tangentu na kružnicu u točki A. Po teoremu o obodnom i središnjem kutu znamo da je $\sphericalangle BSA = \frac{1}{2}\sphericalangle BCA$. Potom iskoristimo da je trokut $\triangle ASB$ jednakokračan da dobijemo $\sphericalangle SAB = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle BSA) = 90° - \sphericalangle BCA$. Naposljetku, koristeći važnu činjenicu da su **polumjer kružnice $\overline{AS}$ i tangenta na kružnicu u točki A okomiti**, dobivamo da je traženi kut između tetive i tangente jednak $90° - \sphericalangle SAB = \sphericalangle BCA$.

Zadatak 1. Dan je trokut $\triangle ABC$. Simetrala kuta u vrhu C siječe opisanu kružnicu trokuta $\triangle ABC$ u točki D (naravno siječe ju i u točki C). Označimo nožište okomice iz D na dužinu $\overline{AB}$ s E. Dokažite da je $|AE| = |BE|$, tj. da je pravac DE simetrala dužine $\overline{AB}$ (slika 2).

Rješenje. Ovdje je glavni dio zadatka uočiti za koje lukove ćemo primijeniti sukladnost obodnih kutova nad istim lukom. Da bismo to uopće mogli primijeniti, trebat će nam 4 točke na kružnici, pa svakako nije na odmet docrtati tetive koje fale: to su tetive $\overline{AD}$ i $\overline{BD}$. *To je i općenito dobra strategija pri rješavanju ovakvih zadataka, naravno ako nemamo*



Slika 2.



Slika 3.

previše točaka na skici pri čemu se onda lako pogubiti. Upravo za lukove $\overset{\frown}{AD}$ i $\overset{\frown}{BD}$ iskoristit ćemo navedenu činjenicu. Označimo $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB = \alpha$. Gledajući obodne kutove nad lukom $\overset{\frown}{AD}$ dobivamo $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = \alpha$, a nad lukom $\overset{\frown}{DB}$ dobivamo $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB = \alpha$. Sada vidimo da je $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABD$, pa je $\triangle ABD$ jednakokračan. Time smo zapravo riješili zadatak budući da znamo da je okomica iz sjecišta krakova jednakokračnog trokuta na osnovicu tog trokuta zapravo simetrala osnovice (tu činjenicu u ovom zadatku lako dobijemo npr. iz K-S-K poučka o sukladnosti primijenjenom na trokute $\triangle AED$ i $\triangle BED$).

Na osnovu prethodnog zadatka možemo poopćiti tvrdnju o sukladnosti obodnih kutova nad istim lukom. Naime, vidjeli smo da sukladnost obodnih kutova nad različitim lukovima povlači da su ti lukovi sukladni, a promatrajući rješenje prethodnog zadatka unazad lako ćemo se uvjeriti da vrijedi i obrat ove tvrdnje: **svi obodni kutovi na istoj kružnici nad sukladnim lukovima su sukladni**. U sljedećem zadatku pokazat ćemo kako računati kutove uz središte opisane kružnice trokuta i uz visine trokuta. Ovisnost veličina tih kutova o unutarnjim kutovima trokuta vrijedi zapamtiti.

Zadatak 2. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokažite da je $\sphericalangle BAN = \sphericalangle OAC$ (slika 3).

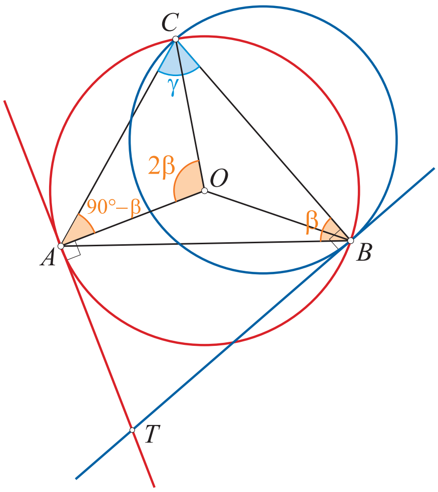
Rješenje. Označimo $\sphericalangle CBA = \beta$. S jedne strane, promatrajući kutove pravokutnog trokuta $\triangle ABN$ dobivamo da je $\sphericalangle BAN = 90^\circ - \beta$. S druge strane, za određivanje kuta $\sphericalangle OAC$ prvo ćemo iskoristiti teorem o obodnom i središnjem kutu da dobijemo $\sphericalangle COA = 2\sphericalangle CBA = 2\beta$, a potom činjenicu da je trokut $\triangle AOC$ jednakokračan (sjetimo se da je točka O jednako udaljena od svih vrhova trokuta $\triangle ABC$) da dobijemo $\sphericalangle OAC = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle COA) = 90^\circ - \beta$. Vidimo da smo zaista dobili $\sphericalangle BAN = \sphericalangle OAC$.

Tvrdnja prethodnog zadatka inače vrijedi i kad je trokut $\triangle ABC$ tupokutan, samo će sam raspis kutova biti ponešto drukčiji. Provjeru toga ostavljamo čitatelju.

Sljedeći zadatak možemo doživjeti kao nadogradnju na prethodni.

Zadatak 3. U kružnicu je upisan šiljastokutan trokut $\triangle ABC$ takav da vrijedi $\sphericalangle ACB - \sphericalangle CBA = 20^\circ$. Neka je p tangenta na kružnicu opisanu trokutu $\triangle ABC$ u točki A, a q tangenta u točki B na kružnicu čiji je promjer dužina $\overline{BC}$. Odredite veličinu šiljastog kuta pod kojim se sijeku pravci p i q (slika 4).

Rješenje. Označimo sjecište tangenti s T, te neka su kutovi trokuta $\triangle ABC$ označeni standardno. Želimo odrediti kutove četverokuta $ATBC$, te ćemo izračunati traženi kut $\sphericalangle BTA$ pomoću preostala tri u tom četverokutu. Dva kuta odmah znamo izraziti: $\sphericalangle ACB = \gamma$ i $\sphericalangle CBT = 90^\circ$. Da je posljednji kut pravi znamo jer je $\overline{BC}$ promjer plave kružnice i kao takav on će biti okomit na tangentu u jednoj svojoj



Slika 4.

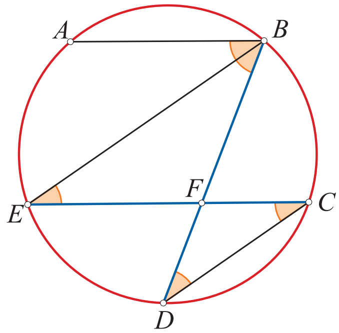
krajnoj točki. Dakle, jedini kut koji nam je ostao je $\sphericalangle TAC$.

No, njega ne možemo dobiti direktno, već ćemo ga rastaviti na dva kuta s pomoću dužine $\overline{AO}$, gdje smo s O označili središte kružnice opisane trokutu $\triangle ABC$. *Ovo je još jedno uobičajeno docrtavanje.* Odmah vidimo da je kut $\sphericalangle TAO$ pravi iz istog razloga kao što je to bilo za kut $\sphericalangle CBT$, samo je sada riječ o polumjeru umjesto o promjeru kružnice. Potom primijetimo da na potpuno isti način kao u prethodnom zadatku možemo odrediti veličinu kuta $\sphericalangle OAC$. Dakle, $\sphericalangle OAC = 90^\circ - \beta$, što znači da je kut $\sphericalangle TAC = 180^\circ - \beta$, pa na kraju računamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle BTA &= 360^\circ - \sphericalangle CBT - \sphericalangle ACB - \sphericalangle TAC\\ &= 360^\circ - 90^\circ - \gamma - (180^\circ - \beta)\\ &= 90^\circ - (\gamma - \beta) = 90^\circ - 20^\circ\\ &= 70^\circ.\end{aligned}$$

Zadatak 4. Zadana je kružnica k i njene tetive $\overline{AB}$, $\overline{BE}$, $\overline{EC}$, $\overline{BD}$. Ako je AB paralelno s EC i BE simetrala kuta $\sphericalangle ABD$, dokažite da je $|EC| = |BD|$ (slika 5).

Rješenje. Najzahtjevniji dio ovog zadatka je u moru potencijalno korisnih obodnih kutova uočiti one koji vode k rješenju. Stoga je uvijek korisno naći što je više moguće sukladnih kutova, a ako je moguće



Slika 5.

to je idealno činiti počevši od onih koji su posebno istaknuti u samom zadatku. Ovdje su u tom kontekstu istaknuti kutovi $\sphericalangle ABE$ i $\sphericalangle EBD$ koji su jednaki i to nad različitim lukovima, pa je vrlo izgledno da ćemo na skici uspjeti naći još veliki broj njima sukladnih kutova.

Označimo $\sphericalangle ABE = \sphericalangle EBD = \alpha$ i F neka je sjecište dužina $\overline{BD}$ i $\overline{EC}$. Zbog paralelnosti dužina $\overline{AB}$ i $\overline{EC}$ dobivamo da je $\sphericalangle CEB = \sphericalangle ABE = \alpha$ (*uočimo da paralelnost daje još kutova koji su jednaki* α), pa je $\triangle BEF$ jednakokračan, tj. $|EF| = |BF|$. Iz jednakosti obodnih kutova redom nad lukovima $\overset{\frown}{ED}$ i $\overset{\frown}{CB}$ dobivamo i $\sphericalangle ECD = \sphericalangle EBD = \alpha$, odnosno $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CEB = \alpha$. Dakle, $\sphericalangle FCD = \sphericalangle CDF = \alpha$, iz čega zaključujemo da je $\triangle DCF$ jednakokračan i $|DF| = |CF|$. Naposljetku dobivamo

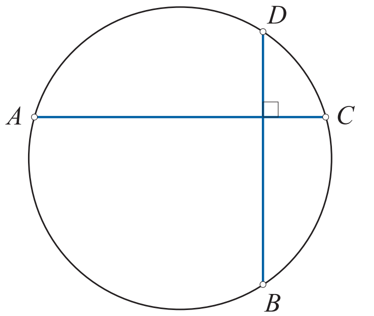
$$|BD| = |BF| + |DF| = |EF| + |CF| = |EC|,$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatci za vježbu

5. Dane su kružnica k i točka T izvan kružnice. Iz točke T povucimo obje tangente na kružnicu i nazovimo njihova dirališta A i B. Pokažite da je $\triangle TAB$ jednakokračan.

6. Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ dvije su međusobno okomite tetive, kao na slici 6. Neka je točka E sjecište tih tetiva, a točka F nožište okomice iz točke B na dužinu $\overline{AD}$. Dokažite da dužina $\overline{BD}$ raspolavlja kut $\sphericalangle CBF$ (slika 6).



Slika 6.

7. Dvije kružnice k_1 i k_2 jednakih polumjera sijeku se u točkama A i B. Kroz točku A provučen je pravac koji siječe kružnicu k_1 u točki C i kružnicu k_2 u točki D. Dokažite da je $\triangle BCD$ jednakokračan.

8. Neka je dužina $\overline{AD}$ promjer kružnice, a B i C točke na kružnici takve da se dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku unutar kružnice pod kutom od $60°$. Ako je točka S središte kružnice, dokažite da je trokut BCS jednakostraničan.

Državno natjecanje 2017., 7. razred

9. Neka je D točka na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC takva da pravac AB dira opisanu kružnicu trokuta BCD u točki B i neka pritom vrijedi $|BD| = |CD|$. Dokažite da je pravac BD simetrala kuta $\sphericalangle CBA$.

Državno natjecanje 2015., 8. razred

10. Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ dvije su međusobno okomite tetive, kao na slici 6. Okomica povučena iz točke A na pravac CD siječe pravac BD u točki M, a okomica iz točke B na pravac CD siječe pravac AC u točki N. Dokažite da je četverokut $ABNM$ romb.

Državno natjecanje 2002., 8. razred

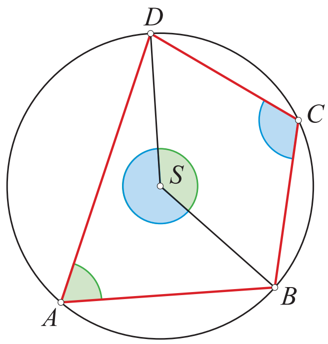
11. Na kružnici k nalaze se točke A i B, a na manjem luku AB točka P. Neka su Q i R točke na k, različite od P, takve da je $|AP| = |AQ|$ i $|BP| = |BR|$. Neka je T sjecište pravaca AR i BQ. Dokažite da su pravci PT i AB međusobno okomiti.

Županijsko natjecanje 2016., 2. razred, A varijanta

Tetivni četverokut

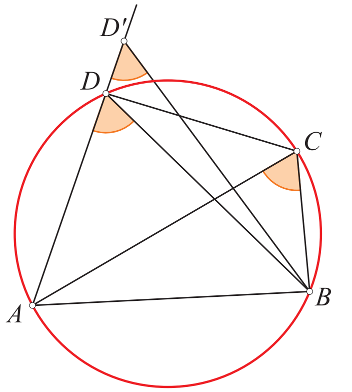
Nastavljamo s tetivnim četverokutima. Svaki četverokut kojem se može opisati kružnica, tj. svaki četverokut kojemu sva četiri vrha leže na istoj kružnici zove se **tetivni četverokut**. Za razliku od trokuta kojima se svima može opisati kružnica, četverokuti kojima svi vrhovi leže na jednoj kružnici općenito su iznimno rijetki; dovoljno je nacrtati tri točke, konstruirati kružnicu koja njima prolazi te za četvrtu točku četverokuta uzeti bilo koju točku koja nije na toj kružnici i sigurni smo da mu ne možemo opisati kružnicu. Unatoč tome brojni su geometrijski zadatci u kojima je ključno uočiti, a potencijalno i docrtati tetivne četverokute. Za uvod ćemo pokazati osnovna svojstva tetivnih četverokuta.

Primjer 2. Iz činjenice da su obodni kutovi nad istim lukom sukladni jasno je da u tetivnom četverokutu $ABCD$ vrijedi da je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$, kao i analogne tvrdnje. Zanimljivo je da vrijedi i obrat, tj. ako za konveksan četverokut $ABCD$ znamo da su navedena dva kuta jednaka, smijemo zaključiti da je četverokut tetivan (slika 7). Pokažimo to!



Slika 7. Tetivni četverokut $ABCD$ s opisanom mu kružnicom koja ima središte u S. U skladu s primjerom 3, odgovarajući parovi obodnih i središnjih kutova označeni su istom bojom.

Nacrtajmo kružnicu koja prolazi vrhovima A, B i C četverokuta. Ako se D nalazi na toj kružnici onda je četverokut $ABCD$ tetivan, stoga pretpostavimo da to nije istina. Tada polupravac AD siječe kružnicu u točki D' koja je različita od D. Recimo da je $|AD| < |AD'|$ (slika 8); drugi slučaj rješava se analogno. Budući da su $\sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle AD'B$ obodni kutovi nad istim lukom, slijedi da moraju biti sukladni. No, jednakost $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle AD'B$ povlači paralelnost pravaca BD i BD'. To će biti moguće samo ako je $D = D'$, što smo pretpostavili da ne vrijedi. Time smo došli do kontradikcije. Dobivanjem istog zaključka u slučaju $|AD| > |AD'|$ dolazimo do kraja ovog primjera.



Slika 8.

Primjer 3. Pokažimo da je tetivnom četverokutu, kojeg označimo s $ABCD$, zbroj nasuprotnih kutova jednak $180°$. Dvostrukom primjenom teorema o obodnom i središnjem kutu, uz oznaku S za središte kružnice koja je opisana četverokutu $ABCD$, odmah dobivamo da je izraz $\sphericalangle BAD + \sphericalangle DCB$ jednak polovini zbroja pripadnih središnjih kutova, a oni pak čine puni kut u vrhu S. Iz toga slijedi jedan smjer tvrdnje. Uočimo da, iako je na slici 7 kut $\sphericalangle DCB$ tupi, on ima svoj pripadni središnji kut koji je pritom veći od $180°$.

Napomenimo da vrijedi i obrat tvrdnje prethodnog primjera, tj. ako za neki četverokut znamo da mu je zbroj nasuprotnih kutova $180°$, onda je taj četverokut tetivan. Tehnika dokaza te tvrdnje vrlo je slična onoj u primjeru 2, pa to ostavljamo kao zadatak. Znatiželjniji čitatelj alternativni dokaz može pronaći u [3]. U nastavku navedimo još jednu važnu tvrdnju koja povezuje duljine stranica i dijagonala tetivnog četverokuta.

Teorem 3. (Ptolemejev poučak) *Četverokut $ABCD$ je tetivan ako i samo ako vrijedi*

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|.$$

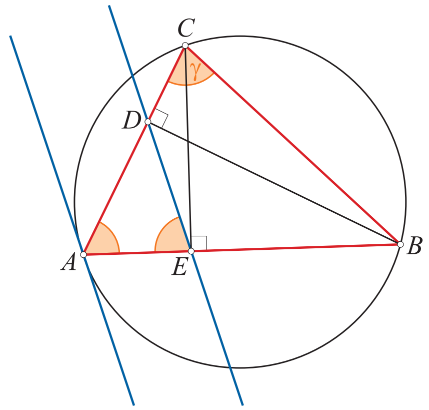
Drugim riječima, četverokut je tetivan ako i samo ako je zbroj umnožaka duljina parova nasuprotnih stranica jednak umnošku duljina njegovih dijagonala.

Dokaz koji ne koristi nikakve naprednije planimetrijske tvrdnje od onih koje koristimo ovdje može se naći u [1, Poglavlje 2.1]. Sada prelazimo na zadatke.

Zadatak 12. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut takav da je $|AB| = |BC| = |CA|$ i $\sphericalangle ADC = 120°$. Dokažite da je $|BD| = |AD| + |CD|$.

Rješenje. Uočimo da je trokut $\triangle ABC$ jednakostraničan, pa je $\sphericalangle CBA + \sphericalangle ADC = 60° + 120° = 180°$. To znači da je četverokut $ABCD$ tetivan jer mu je zbroj naspurotnih kutova jednak $180°$. Sada primijenimo Ptolemejev poučak na taj četverokut: $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$, pa zbog $|AB| = |BC| = |CA|$ dijeljenjem jednakosti s $|AB|$ dobivamo traženu tvrdnju.

Zadatak 13. U trokutu $\triangle ABC$ neka su nožišta visina iz B i C redom točke D i E. Dokažite da je tangenta na opisanu kružnicu trokuta $\triangle ABC$ u točki A paralelna s pravcem DE (slika 9).



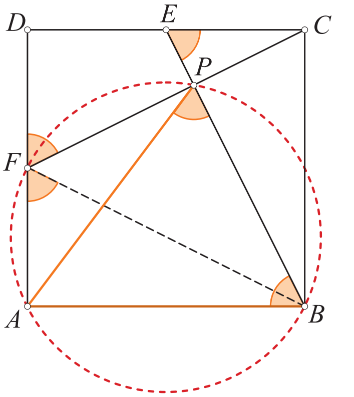
Slika 9.

Rješenje. Za razliku od prethodnog zadatka gdje nam je u zadatku bio zadan tetivni četverokut, ovdje ćemo ga morati naći sami te potom primijeniti poznate tvrdnje o tetivnim četverokutima. U tu svrhu uočimo da je $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BEC = 90°$, pa po tvrdnji iz primjera 2 zaključujemo da je četverokut $BCDE$ tetivan. *Upravo ovakvi tetivni četverokuti kojima su vrhovi dva vrha trokuta i dva pripadna nožišta visina vrlo su česti i bitno je da ih se u zadatcima odmah uoči ako postoje.* Označimo $\sphericalangle ACB = \gamma$.

Po teoremu o kutu između tetive i tangente (tj. primjeru 1) kut između tangente u točki A i pravca AB također je jednak γ. Usto, koristeći primjer 3 dobivamo da je $\sphericalangle DEA = 180^\circ - \sphericalangle BED = \sphericalangle DCB = \gamma$. Dakle, kut između tetive i tangente sukladan je kutu $\sphericalangle DEA$, iz čega slijedi tražena paralelnost pravaca.

Situacije poput onih iz prethodnih zadataka su uobičajene: potrebno je naći tetivni četverokut s pomoću jedne njegove karakterizacije, a onda koristimo jednu od preostalih u samom dokazu tvrdnje. (Karakterizacija je tvrdnja koju možemo iskoristiti kao alternativnu definiciju nekog pojma, npr. za pojam tetivnog četverokuta to bi bile tvrdnje iz primjera 2 i 3 te teorema 3). Na sličan način riješit ćemo i sljedeći zadatak.

Zadatak 14. Točke E i F su redom polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ kvadrata $ABCD$. Pravci BE i CF sijeku se u točki P. Dokažite da je $|AP| = |AB|$ (slika 10).



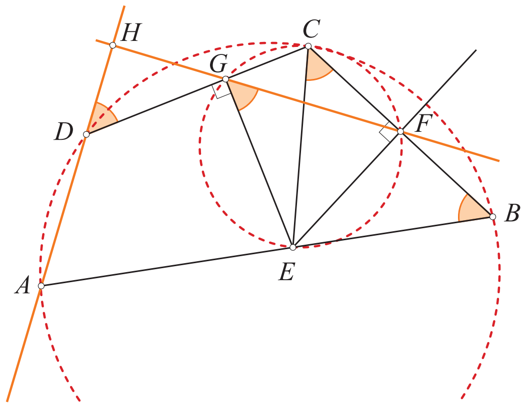
Slika 10.

Rješenje. Ovaj zadatak na prvu djeluje kao da ne pripada ovoj temi, pogotovo jer nemamo nijednu kružnicu zadanu u zadatku, a i sama tvrdnja ne daje naslutiti da će nam tetivni četverokuti trebati. Međutim, zadatak se može relativno jednostavno riješiti korištenjem svojstava tetivnih četverokuta, što pokazuje da se ta svojstva mogu primijeniti u naizgled vrlo različitim zadatcima. Također na prvi pogled uopće nije jasno kako bismo trebali prepoznati da je neki od četverokuta na skici tetivan. Stoga je vrlo važno odrediti što više kuteva sa skice kako bismo uspjeli iskoristiti jednu od karakterizacija tetivnog četverokuta. Naime, uglavnom je to i jedini način za prepoznati je li četverokut tetivan ili ne, jer je na oko to praktički nemoguće procijeniti.

Ovdje ćemo prikazati rješenje u svom najsažetijem obliku. Treba imati na umu da će prosječan učenik putem vjerojatno odrediti veličine mnogih kutova koje mu u samom rješenju na kraju ipak neće trebati, što je itekako poželjno i na takav pristup (da se ne boje izračunati što više kutova) učenike treba poticati. Lako se vidi da je po S-K-S poučku o sukladnosti $\triangle BCE \cong \triangle CDF$. Iz toga slijedi da je $\sphericalangle PBA = CFD = 180^\circ - \sphericalangle AFP$ (ovdje koristimo jednakost kutova s okomitim kracima), što povlači da je četverokut $ABPF$ tetivan. Nadalje, po S-K-S poučku o sukladnosti vrijedi i $\triangle BAF \cong \triangle CDF$, pa je $\sphericalangle CFD = \sphericalangle AFB$. Kako je četverokut $ABPF$ tetivan, primjer 2 daje da je $\sphericalangle APB = \sphericalangle AFB$, pa kada sve spojimo vidimo da je $\sphericalangle APB = \sphericalangle PBA$, zbog čega je zaista $|AP| = |AB|$.

Za kraj pokažimo i kako se nositi s više tetivnih četverokuta u istom zadatku.

Zadatak 15. Dan je tetivni četverokut $ABCD$. Simetrala dužine $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki E. Kružnica koja prolazi točkom E, vrhom C i polovištem F stranice $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{CD}$ u točki G. Dokažite da je $AD \perp FG$ (slika 11).



Slika 11.

Rješenje. Primijetimo da su u zadatku dana dva tetivna četverokuta: $ABCD$ i $EFCG$, stoga nije neočekivano da ćemo koristiti svojstva obaju četverokuta. Označimo s H sjecište pravaca AD i FG i docrtajmo dužine $\overline{CE}$ i $\overline{EG}$. *Općenito je tetivnim četverokutima pametno na skici docrtati* *sve stranice i dijagonale, budući da time dobivamo veći broj kutova od kojih neki potencijalno može biti ključan za rješenje.* Usto označimo i $\sphericalangle GDH = \alpha$. Pokazat ćemo da je $\sphericalangle HGD = 90° - \alpha$, iz čega će, promatrajući $\triangle HDG$, slijediti tvrdnja zadatka.

Četverokut $ABCD$ je tetivan, pa je po primjeru 3 $\sphericalangle CBA = 180° - \sphericalangle ADC = \sphericalangle GDH = \alpha$. Budući da je $\triangle BEF \cong \triangle CEF$ kao posljedica svojstava simetrale dužine (S-K-S poučak), imamo $\sphericalangle ECB = \sphericalangle CBE = \alpha$. Sada, kako je četverokut $EFCG$ tetivan, vrijedit će $\sphericalangle EGF = \sphericalangle ECF = \alpha$ i $\sphericalangle EGC = 180° - \sphericalangle CFE = 90°$ prema primjerima 2 i 3. Naposljetku je $\sphericalangle HGD = \sphericalangle FGC = \sphericalangle EGC - \sphericalangle EGF = 90° - \alpha$, što smo i željeli.

Zadatci za vježbu

16. Sličnim postupkom kao u primjeru 2 pokažite da je četverokut tetivan ako mu je zbroj nasuprotnih kutova jednak $180°$.

17. Pokažite da trapez tetivni četverokut ako i samo ako je jednakokračan.

18. Dan je tetivni četverokut $ABCD$. Neka okomica na AB u točki B siječe pravac CD u E, te neka okomica na CD u točki D siječe pravac AB u točki F. Dokažite da je $AC \parallel EF$.

19. Pravci AB, CD i EF sijeku se u istoj točki T. Ako su četverokuti $ABDC$ i $CDFE$ tetivni, dokažite da onda i četverokut $ABFE$ mora biti tetivan.

20. Dan je šiljastokutan trokut $\triangle ABC$ u kojem vrijedi $|AC| > |AB|$, a točka O je središte opisane kružnice. Simetrala kuta $\sphericalangle CAB$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Pravac okomit na pravac AD koji prolazi kroz točku B siječe pravac AO u točki E. Dokažite da točke A, B, D i E leže na istoj kružnici.

Županijsko natjecanje 2017., 2. razred, A varijanta

21. Dužina $\overline{AB}$ je promjer kružnice sa središtem u točki O. Na kružnici je dana točka C takva da je $OC \perp AB$. Na kraćem luku BC odabrana je točka P. Pravci CP i AB sijeku se u točki Q, a točka R je sjecište pravca AP i okomice kroz Q na AB. Dokažite da je $|BQ| = |QR|$.

Državno natjecanje 2014., 1. razred, A varijanta

22. Neka je $\triangle ABC$ jednakokračni trokut s osnovicom $\overline{BC}$ takav da je $\sphericalangle BAC = 36°$. Kružnica sa središtem u točki C i polumjerom $\overline{AC}$ siječe pravac AB u točki D. Kružnica koja prolazi točkama B, C i D siječe prvu kružnicu u točkama D i E. Ako je S sjecište pravaca AE i CD, dokažite da je $|DS| = |BC|$.

23. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama A i B. Pravac l siječe kružnicu k_1 u C i E, a kružnicu k_2 u D i F tako da se točka D nalazi između C i E, a točka E između D i F. Pravci CA i BF sijeku se u točki G, a pravci DA i BE u točki H. Dokažite da je $CF \parallel HG$.

Državno natjecanje 2015., 1. razred, A varijanta

LITERATURA

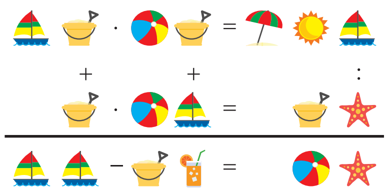
1/ S. Hršak (2018.): *Ptolomejev teorem – dokazi, posljedice i poopćenja*, Diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

2/ S. Varošanec (1995.): *Teorem o obodnom i središnjem kutu*, Matka br. 13, `https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2014/12/Matka13-m02-obodni-kut.pdf`

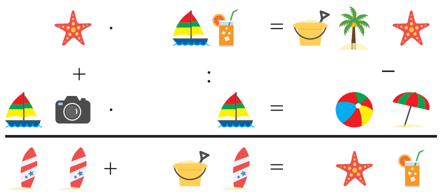
3/ S. Varošanec (1998.): *Tetivni četverokuti*, Matka br. 23, `https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2014/12/Matka23-m04-tetivni.pdf`

Matematički rebusi za ljetnu razonodu!

1)



2)



Rješenja: 1) 42 · 12 = 504, 2 · 14 = 28, 44 - 26 = 18; 2) 4 · 26 = 104, 29 · 2 = 58, 33 + 13 = 46.