

Pismene zadaće iz matematike na maturi 2000./2001.



II. gimnazija, Osijek (opća)

1. Riješi jednadžbe i nejednadžbe:

- a) $|x + 5| - |3 - 2x| = x - 6$;
- b) $\log(0.1x^2) \cdot \log \frac{10}{x} = -3$;
- c) $\frac{x^2 + x}{-x^2 + 3x - 2} \leq 0$;
- d) $4 \sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x = 2$.

2. Zadane su funkcije

$$f(x) = 2^x \quad \text{ i } \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}.$$

- a) U istom koordinatnom sustavu nacrtaj grafove funkcija f i g .
- b) Riješi jednadžbu $f(x) = g(x)$.
- c) Odredi funkciju $g^{-1}(x)$.

3. Zadan je trokut s elementima: $a = 10$ cm, $v_a = 8$ cm, $\gamma = 38^\circ$.

- a) Odredi duljine stranica b , c , kut α .
- b) Odredi oplošje i volumen tijela koje nastaje rotacijom trokuta oko stranice a .

4. Pravac $9x - 3\sqrt{7}y + 14 = 0$ je zajednička tangenta parabole $y^2 = 2px$ i kružnice čije je središte u fokusu parabole.

- a) Napiši jednadžbe parabole i kružnice.
- b) Odredi kut pod kojim se sijeku krivulje.

5. Opiši tijek i skiciraj graf funkcije:

$$f(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2.$$

III. gimnazija, Osijek (prirodoslovno matematička)

1. Rješenja jednadžbe

$$\frac{3 - \log x}{5 - \log x} + \frac{\log x}{1 + \log x} = 1$$

su prva dva člana rastućeg geometrijskog niza.

- a) Riješi jednadžbu.
- b) Nađi prvi, drugi i deseti član, te kvocijent zadanog geometrijskog niza.
- c) Koliko članova niza treba zbrojiti da se dobije 111 110?

2. Duljine stranica trokuta su uzastopni cijeli brojevi. Najveći kut trokuta je dva puta veći od najmanjega. Nađi oplošje i volumen tijela koje nastaje rotacijom trokuta oko najdulje stranice.

3. Pozitivno rješenje jednadžbe

$$\left(\frac{25}{9}\right)^x \cdot (0.6)^{x^2+x} = 0.36$$

je drugi član aritmetičkog niza, a zbroj reda $15 - 15 \sin \frac{\pi}{6} + 15 \sin^2 \frac{\pi}{6} - 15 \sin^3 \frac{\pi}{6} + \dots$ jednak je osmom članu tog istog aritmetičkog niza.

- Riješi jednadžbu.
- Nađi zbroj reda.
- Odredi prvi član, razliku i sumu prvih dvadeset članova niza.
- Odredi indeks prvog od onih članova niza, koji su veći od 500.

4. Dana je funkcija

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + px + 4.$$

- Odredi parametar p tako da funkcija ima ekstrem za $x = -1$.
- Za dobivenu vrijednost parametra p ispitaj tijek i nacrtaj graf funkcije.
- Izračunaj površinu lika omeđenog krivuljom i koordinatnim osima x i y .

5. Odredi jednadžbu kružnice koja u točkama $A(8, 8)$ i $B(8, -8)$ siječe parabolu $y^2 = 8x$ pod pravim kutom. Odredi zatim površinu četverokuta koji je određen točkama A i B i presječnim točkama tangenata povučenim na parabolu i kružnicu.

III. gimnazija, Split (prirodoslovno matematička)

1. Diskutiraj u ovisnosti o $m \in \mathbf{R}$ rješenja jednadžbe:

$$(\sin x + \cos x) + \frac{1 + (\sin x + \cos x)}{\sin x \cos x} = m.$$

Uputa. Uvedi supstituciju $\sin x + \cos x = t$.

2. Zadane su krivulje $3x^2 - y^2 = 12$ i $y^2 = 16x$.

- Izračunaj površinu trapeza čiji vrhovi leže

u točkama dirališta zajedničkih tangenata tih krivulja.

- Odredi kut pod kojim se iz fokusa parabole vide dijagonale trapeza.

3. Odredi $x \in \mathbf{R}$ tako da je u razvoju binoma $\left[\sqrt{2 \log(10-3^x)} + \sqrt[5]{2^{(x-2) \log 3}}\right]^n$ šesti član jednak 21 i tako da binomni koeficijenti drugog, trećeg i četvrtog člana razvoja binoma budu prvi, peti i deveti član aritmetičkog niza.

4. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$z^3(1+i) - 4\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 = 0$$

koja su u području $\mathbf{C} \setminus D$, gdje je:

$$D = \{z \in \mathbf{C} : z \cdot \bar{z} - (2-i)z - (2+i)\bar{z} \geq 0\}.$$

5. Ispitaj po svim elementima i nacrtaj graf funkcije $f(x) = \frac{(1+x)^3}{(1-x)^2}$.

Napomena:

- učenici mogu koristiti isključivo tiskane formule (npr. Logaritamske tablice, "Memo", Bronsteinov priručnik isl.), geometrijski pribor i džepno računalo;
- svaki se zadatak vrednuje sa 20 bodova;
- moraju se priložiti svi korišteni papiri.

IV. gimnazija "M. Marulić", Split

1. Riješi jednadžbu:

$$\frac{4}{x^2 - 3x + 2} - \frac{3}{2x^2 - 6x + 1} + 1 = 0.$$

2. U trokutu je zadano: $s - b = 8$, $\alpha = 126^\circ 52' 12''$, $\gamma = 14^\circ 15'$, gdje je s poluposeg.

- Nađi nepoznate stranice trokuta.
- Izračunaj oplošje i volumen tijela koje nastaje rotacijom trokuta oko pravca koji prolazi kroz vrh A i paralelan je sa stranicom a .

3. Pravac $\frac{x}{-8} + \frac{y}{4} = 1$ zajednička je tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i s njom konfokalne parabole $y^2 = 2px$.

- Odredi jednadžbu elipse i parabole.
- Odredi jednadžbu kružnice koja prolazi diralištima zadanog pravca sa krivuljama i ishodištem koordinatnog sustava.

4. Tri broja, treći je $6 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{\dots}}}}$, uzastopni su članovi geometrijskog niza. Ako se treći član umanjuje za 3, ti će brojevi biti uzastopni članovi aritmetičkog niza. Koji su to brojevi?

5. Zadana je funkcija $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 4x + 4}$.

- Ispitajte tijek funkcije.
- Nacrtajte graf funkcije.
- Izračunajte površinu trokuta omeđenog koordinatnim osima i tangentom na graf funkcije f u točki s apscisom -1 .

V. gimnazija "V. Nazor", Split

1. Zadana je funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ na sljedeći način:

— vodeći koeficijent $a = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n} - n)$,

— linearni koeficijent b jednak je rješenju jednadžbe $2 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}}$,

— slobodni koeficijent c jednak je vrijednosti izraza $0.2^{\log_{\sqrt{5}}(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots)}$.

Odredite koeficijente a , b i c funkcije $f(x)$, nacrtajte graf funkcije $f(x) = zx^2 + b|x| + c$ i opišite njezin tijek.

2. Odredite aritmetički niz (a_n) ako je $a_{47} = t$, gdje je t realni broj koji se dobije iz uvjeta

$$16^{\lg x} - 4^{\lg x} = 2$$

$$16^{\lg x} - 4^{\lg x} = t.$$

Diferencija aritmetičkog niza jednaka je vrijednosti derivacije funkcije $f(x) = 5(e^{\sin x} + e^{\cos x})$ u točki $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Izračunajte sumu prvih deset članova tog aritmetičkog niza, a zatim odredite geometrijski niz kojemu je treći član jednak toj sumi, a kvocijent maksimumu funkcije $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4$.

3. Trokut ima površinu $P = 40\sqrt{3}$, zbroj stranica je $a + b = 26$ ($a > b$) i kut $\gamma = 60^\circ$. Nađite oplošje i obujam tijela nastalog rotacijom trokuta oko osi koja prolazi vrhom C okomito na stranicu a .

4. Pravac $3x - 5y + 25 = 0$ zajednička je tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i njoj konfokalne parabole $y^2 = 2px$.

- Odredite jednadžbe krivulja i nacrtajte ih.
- Odredite kut pod kojim se vidi dio tangente između dirališta iz zajedničkog fokusa.
- Izračunajte površinu lika omeđenog zadanom tangentom, osi x i lukom parabole, a zatim odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom tog lika oko osi x .

5. Odredite kvadratnu funkciju $g(x)$ iz uvjeta: zbroj korijena pripadne kvadratne jednadžbe iznosi 5, a zbroj njihovih kvadrata je 17. Formirajte funkciju $f(x) = \frac{g(x) - 4}{g(x)}$, ispitajte njezin tijek i nacrtajte graf.

V. gimnazija, Zagreb (prirodoslovno matematička)

1. Riješi jednadžbe i nejednadžbe:

- $3 \cos^2 x - 4 \cos x - \sin^2 x - 2 = 0$;
- $|x^2 - 1| = x + 3$;
- $\log_{\frac{1}{2}}(2x^2 + 5x + 1) < 0$;
- $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0.2$.

2. a) Na skupu kompleksnih brojeva riješi jednadžbu $z^6 - 64 = 0$.

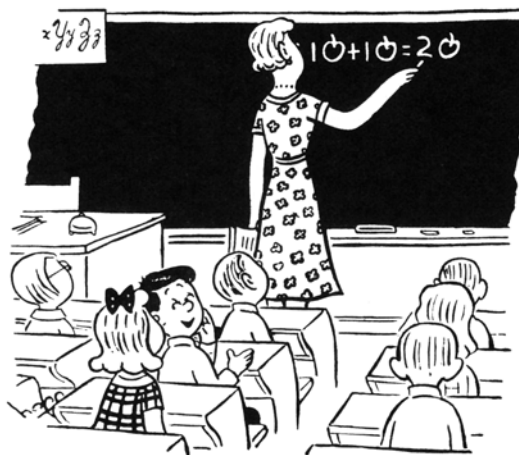
- b) Prikaži rješenja u Gaussovoj ravlini.
 c) Izračunaj površinu lika kojemu su vrhovi točke pod b).
 d) Napiši onu kvadratnu jednadžbu kojoj su rješenja jednaka rješenjima z_2 i $\bar{z}_2$ jednadžbe pod a).

3. Trapez $ABCD$ ($|AB| = 35$ cm, $|BC| = 15$ cm, $|CD| = 10$ cm te $\cos \beta = \frac{3}{5}$ pri čemu je β kut s vrhom u B) rotira oko pravca paralelnog stranici $\overline{AB}$ na udaljenosti 1 cm od $\overline{AB}$ izvan trapeza. Izračunaj volumen i oplošje nastalog tijela.

4. Elipsa prolazi točkama $A(2, 2)$ i $B(2\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Linearni ekscentricitet hiperbole $\sqrt{15}$, a jednadžba njezine asimptote je $y = \frac{1}{2}x$. Odredi:

- a) jednadžbu elipse;
 b) jednadžbu hiperbole;
 c) kut pod kojim se sijeku hiperbola i elipsa;
 d) one tangente elipse koje su od ishodišta udaljene za $d = 2\sqrt{2}$.

5. Zadana je funkcija $f(x) = \frac{x+1}{x^3}$. Ispitaj tijek te funkcije i nacrtaj joj graf.



Biti matematičar je puno lakše nego što sam mislio...

ELEMENT PLUS

37-777-44
37-777-37
37-777-52
45-579-46
45-579-47

INFORMACIJE

CIJENA 1860 KN.
PLAĆANJE MOGUĆE U TRI RATE.
ZA UPISANA OBA TEČAJA CIJENA JE 3150 KN.

ŠKOLA MATEMATIKE I INFORMATIKE

TEČAJEVI MATEMATIKE I INFORMATIKE ZA OSNOVNU I SREDNJU ŠKOLU

**PRIPREME
ZA ŠKOLSKA,
OPĆINSKA,
ŽUPANIJSKA,
REGIONALNA
I DRŽAVNA
NATJECANJA**

**PRIJAVE I UPISI
OD 10. 09. DO 28. 09. 2001.**

**POČETAK NASTAVE
08. 10. 2001.**

**ZAVRŠETAK ŠKOLE
01. 06. 2002.**

IZ MATEMATIKE I INFORMATIKE.