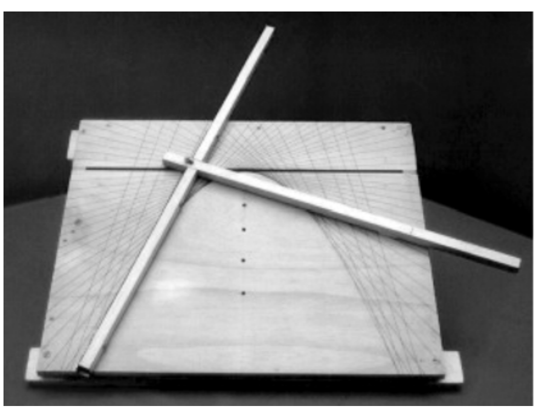
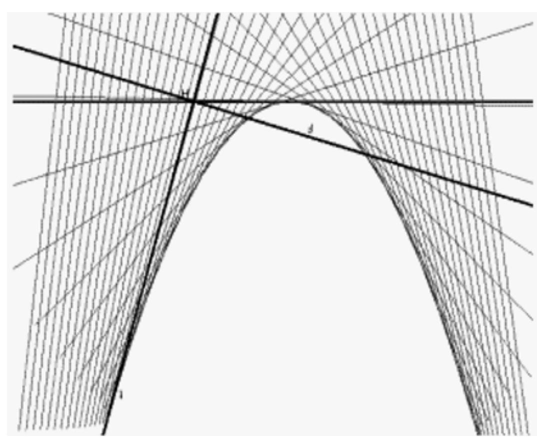
Čunjosječnice

Šime Šuljić, Pazin

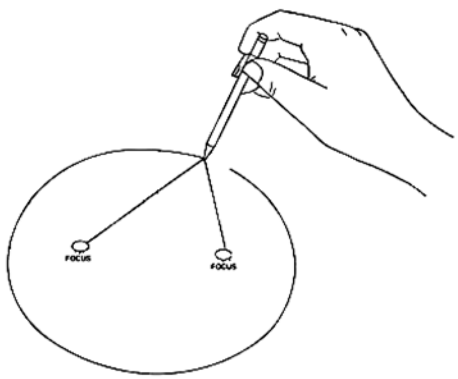
Jeste li ikada posjetili matematički muzej? Mislim na pravi muzej pun povijesnih eksponata. Kako je matematika vrlo apstraktna znanost, prvo ćemo pomisliti kako takav muzej i ne bi mogao obilovati s prevelikim brojem eksponata. Ako nismo čuli za fizički matematički muzej možemo posjetiti sveučilišni virtualni muzej talijanskog grada Modena, na URL adresi `http://www.museo.unimo.it/theatrum/`. Svakako ćemo ostati iznenađeni obiljem raznovrsnih matematičkih pomagala za predodžbu i konstrukciju. Pritom se pored svakog izvornog eksponata nalazi interaktivni aplet, koji ilustrira princip rada. Taj spoj mašte starih matematičara i mogućnosti suvremene kompjutorske tehnologije za posjetitelja pravi je raj. Iz "sobe" s čunjosječnicama prenosim za ovaj članak tek nekoliko sličica radi ilustracije.

Pitanje koje mi se ovdje nameće nakon "posjete" muzeju jest da li su današnji učenici zakinuti za vrlo zorne i opipljive modele? Nalaze li se oni zapravo u međurazdoblju u kojem smo stara pomagala potrošili i odbacili, a nova tehnologija nam u učionice nije stigla, a i teško je prihvaćamo? Navest ću nekoliko različitih načina pristupa čunjosječnicama, koji ne oduzimaju mnogo vremena i lako su izvedivi.



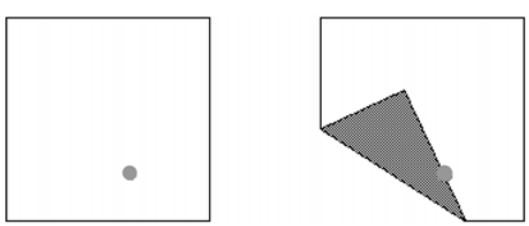


Vrtna konstrukcija elipse



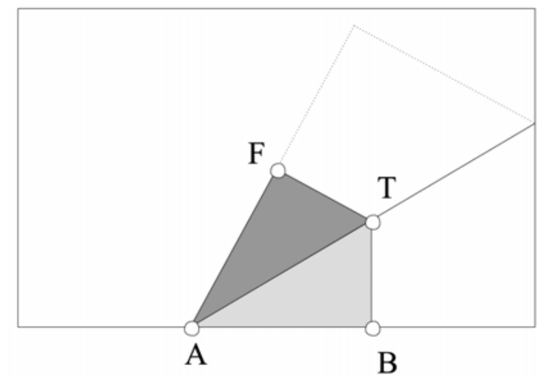
Vrtna konstrukcija elipse opisana je gotovo u svim udžbenicima analitičke geometrije. Od obične drvene letvice i špage dulje od letvice lako se napravi solidan alat za crtanje elipse kredom po ploči ili olovkom po papiru. Krajeve špage treba svezati za krajeve letvice npr. pomoću čavlića ili direktno pričvrstiti na podlogu. Pritom čavlići predstavljaju žarišta, a duljina špage $2a$ je udaljenost tjemena na glavnoj osi. Elipsa se opisuje kredom natežući špagu i time se najočitije pokazuje da je elipsa skup svih točaka ravnine čiji je zbroj udaljenosti do fokusa stalan i jednak $2a$.

Konstrukcija parabole presavijanjem papira



Učeniku za izvođenje ovog eksperimenta nije potrebno ništa drugo do list papira. Bliže jednom rubu papira nacrta se točka, a zatim se kutove papira presavija, tako da presavijeni rub papira prolazi istaknutom točkom kao na gornjoj slici.

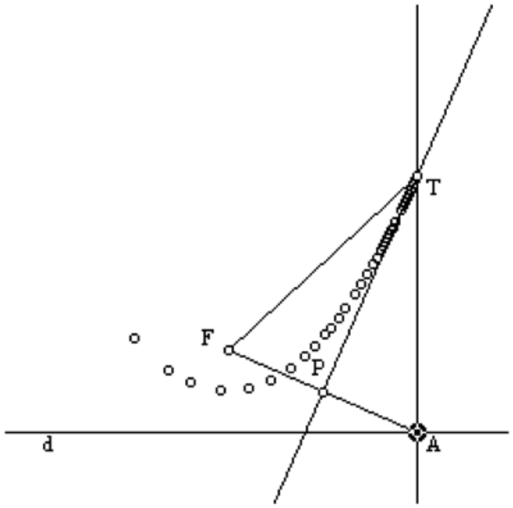
Dobiveni pregib na listu papira može se olovkom naglasiti. Postupak se ponavlja, bar petnaestak puta, dok pregibi ne ocrtaju oblik parabole. Zapravo, rub papira je u ovom slučaju ravnalica parabole, istaknuta točka njen fokus, a pregibne dužine predstavljaju tangente parabole. Svakako je dobro skrenuti učenicima pozornost na to da su dobili međusobno različite parabole, zbog različite udaljenosti točke F od ruba papira.



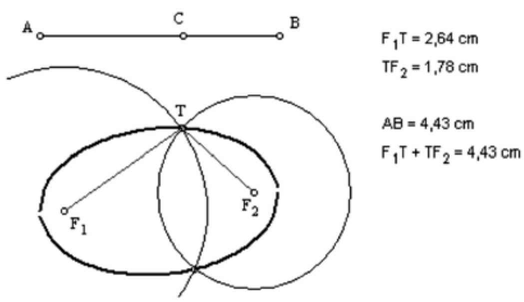
Po definiciji parabola je skup točaka ravnine jednako udaljenih od žarišta i ravnalice. Označimo rubnu točku papira koja pada nekim presavijanjem u žarište s B, a zatim kroz nju povucimo okomicu na rub papira. Ta okomica sjeći će pregibni pravac u točki T. Trokuti ABT i ATF su sukladni, pa je $|FT| = |BT|$, tj. T je točka parabole.

Sketchpadove konstrukcije konika

Konstruirati parabolu u računalnom programu kakav je The Geometer's Sketchpad moguće je na više načina. Svi su vrlo jednostavni ali i očaravajući. Iako je vrlo teško

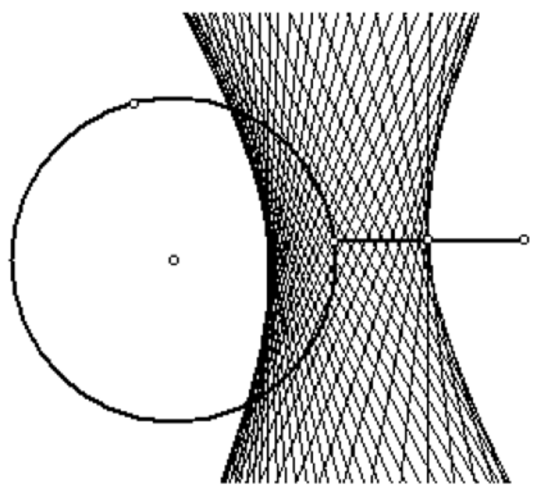


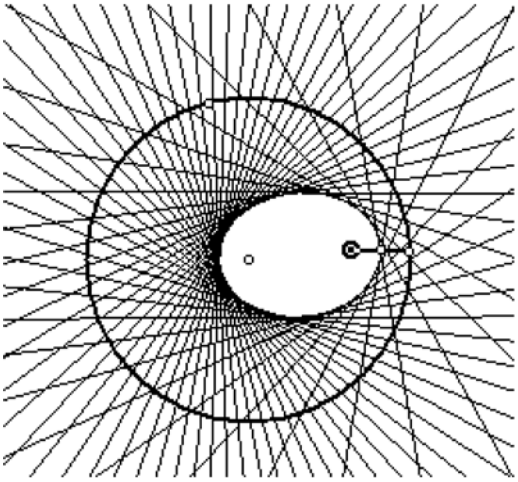
dočarati na papiru što se dinamično zbiva na zaslonu računala, konstrukcija prema definiciji parabole dana je narednim opisom. Točka F i pravac d su proizvoljni objekti ravnine. Točka A je točka pravca d koja se može povlačiti po pravcu. Točka P je polovište dužine $\overline{AF}$. Okomica na dužinu $\overline{AF}$ u točki P i okomica na pravac d u točki A sijeku se u točki T. Tako dobivena točka T jednako je udaljena i od točke F i od pravca d. Zašto? Pridodamo li točki T naredbu ostavljanja traga i pritom pomičemo po pravcu d točku A, pred našim očima nastaje parabola! Stavljamo li zatim u različite položaje fokus i direktrisu, te promjene će dinamično pratiti i parabola, okrećući se na razne strane, šireći se ili sužujući.



Vrtna konstrukcija elipse izvanredno dočarava njenu bit, ali ne treba zaobići i poznatu konstrukciju elipse šestarom. Konstrukcija u Sketchpadu zapravo se svodi na konstrukciju elipse šestarom, kako se vidi na i slici. Glavni alati Sketchpada su zapravo šestar i ravnalo! Elipsa se dobiva kao skup sjecišta kružnica sa središtima u točkama F_1 i F_2 i polumjerima $|AC|$ i $|BC|$, gdje je C točka koja "klizi" dužinom $\overline{AB}$. U Sketchpadu točka C se zaista giba po dužini, a točka T pritom "piše" elipsu. Usput izmjerene duljine radij vektora u centimetrima se mijenjaju, ali ne i njihov zbroj, koji je uvijek jednak duljini $|AB|$.

Ponekad nam je zgodno imati za razredni pano kakvu efektnu sliku, kao na primjer neku od čunjosječnica s mnoštvom tangenata. Ma koliko to izgledalo puno posla, u Sketchpadu je to vrlo jednostavno izvedivo. U već opisanom postupku konstrukcije parabole pravcu PT i točki A pridijelimo naredbu Locus i posao je završen. Međutim, može se izvesti još nešto efektnije uz vrlo jednostavan postupak. Nacrtajmo kružnicu i dužinu s jednom rubnom točkom na kružnici. Konstruirajmo simetralu te dužine i zatražimo da ona ostavlja trag, dok se rubna točka giba po kružnici. Da je rezultat fascinantan, vidi se na sljedeće dvije slike. Pomicanjem slobodne rubne točke dužine dobiva se mnogo različitih skupova tangenti čunjosječnica.

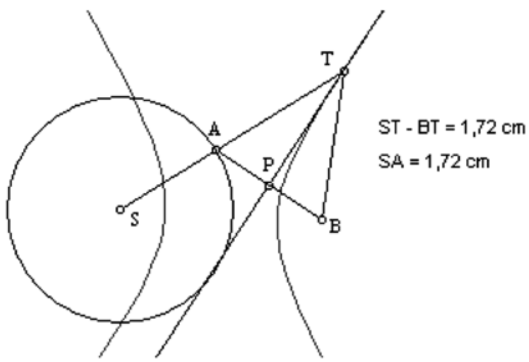




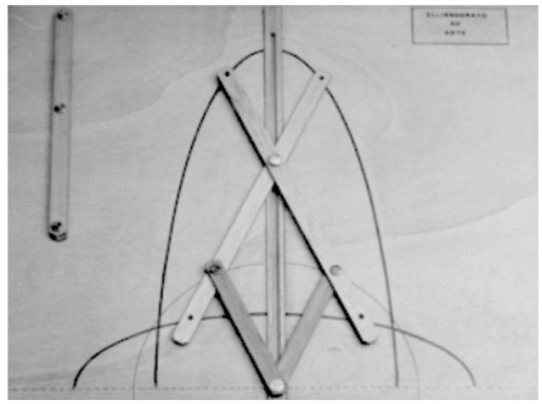
Da se zaista radi o tangentama npr. hiperbole lako je dokazati. Dana je kružnica sa središtem S i dužina $\overline{AB}$ s rubnom točkom A na kružnici. Polovištem P dužine $\overline{AB}$ konstruirana je simetrala dužine. Pravac koji određuju točke A i S siječe simetralu dužine u točki T. Trokuti APT i BTP sukladni su (podudaraju se u dvije stranice i kutu među njima), pa je $|AT| = |BT|$. Stoga vrijedi:

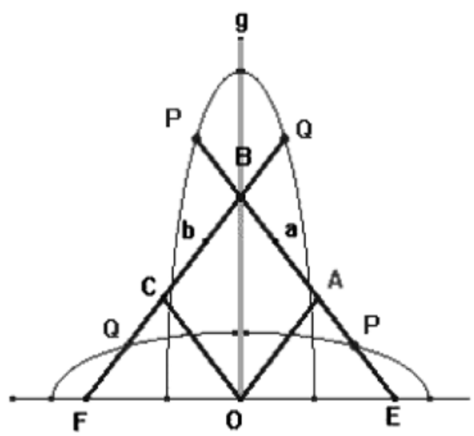
$$|ST| - |BT| = |ST| - |AT| = |SA|,$$

tj. jednako radijusu kružnice, čime je zadovoljena definicija hiperbole. Prema tome, točka T je točka hiperbole, a S i B su njena žarišta.



Geometrijske konstrukcije pomoću programa The Geometer's Sketchpad imaju još jednu prednost. Moguće ih je, naime, postaviti na Internet kao interaktivne aplete. Sa nekim ovdje opisanim konstrukcijama možete se "poigrati" posjetite li URL adresu http://free-pu.hinet.hr/SimeSuljic/index.html. Dosadašnji udžbenici matematike, ako i posežu za računalom, onda to čine na kraju cjelina, kada je potrebno obaviti složenije izračune ili crtanje težih grafova. Današnja su računala međutim moćni edukativni alati, koje treba koristiti u svim fazama matematičkog obrazovanja. Internet, ta knjižnica nad knjižnicama, kojem su naši učenici veoma skloni, mora obilovati i matematičkim sadržajima na hrvatskom. To nam je svima imperativ!





sime.suljic@pu.hinet.hr