

GeoGebra (3)

Prvi softver dinamičke geometrije na hrvatskom jeziku

Šime Šuljic, Pazin



Evo i trećeg nastavka opisa rada računalnog programa **GeoGebra**. Autor **GeoGebra**, salzburški sveučilišni profesor *Markus Hohenwarter* skovao je ime programa od naziva dviju matematičkih disciplina: **geometrije** i **algebre**. U prošlim dvama brojevima najviše smo opisivali alatnu traku programa, a za primjere uzimali pretežno geometrijske konstrukcije. U ovom broju pokušat ćemo opravdati drugi dio imena programa. Vjerujem da su mnogi čitatelji u međuvremenu postali vrlo vješti u radu s programom. Radi onih koji se tek sada uključuju u čitanje, neke osnovne radnje bit će ponovo opisane.

Izravan unos

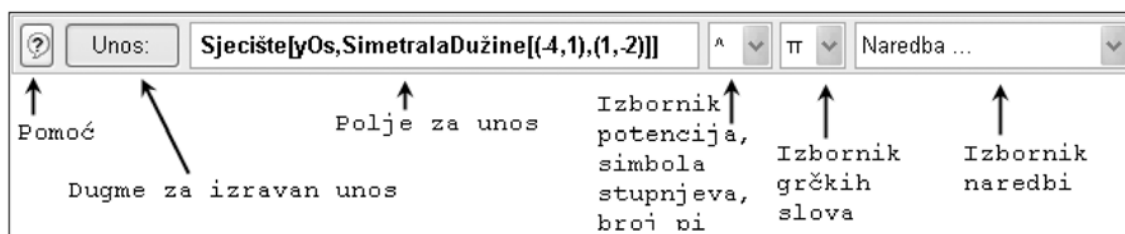
Svi računalni programi dinamičke geometrije već odavno nisu samo geometrijski konstrukcijski alat, već prodiru u područje algebre i analize. Da **GeoGebra** prednjači u tomu, nije zaslužan sa-

mo poseban *algebarski* prozor programa u kojem se nalaze koordinate točaka, jednadžbe pravaca, funkcija i krivulja, duljine dužina, površine mnogokuta, iznosi parametara i veličine kutova, vrijednosti derivacija i integrala, koordinate nultočaka, ekstrema i sjecišta, itd. već “algebarsku snagu” programu daje i posebno *polje za unos* na dnu programskog prozora (vidi sliku 1.).

U *polje za unos* možemo izravno upisivati brojeve, kutove, koordinate točaka, vektore, jednadžbe pravaca, jednadžbe krivulja drugog reda, funkcije, aritmetičke operacije s brojevima i drugim veličinama te naredbe koje se nalaze u *Izborniku naredbi*.

Nekoliko savjeta i uputa

- Klik na dugme za pomoć otvara dijaloški prozor jednostavne pomoći.
- Tipka <Enter> izvodi naredbu.
- Tipka <Esc> čisti polje za unos.
- Tipka <↑> daje posljednji unos.
- Tipka <↓> daje sljedeći unos.



Slika 1.

- Funkcijska tipka <F1> daje pomoć za tekuću naredbu.
- Pri utipkavanju prvih dvaju slova naredbe prikazuje se ponuđena naredba. Odgovara li nam, tipkom <Enter> je prihvaćamo i kursor se postavlja između uglatih zagrada. Ako nam ponuđena naredba ne odgovara, nastavljamo s utipkavanjem sljedećeg slova naredbe.
- Naredbu je moguće unijeti iz padajućeg izbornika s listom naredbi.
- Klikom na dugme **Unos** aktivira se način *polje za unos* u kojem je moguće kopirati imena objekata u polje za unos klikom na objekte u geometrijskom ili algebarskom prozoru.

Primjer jednostavne konstrukcije

Krenimo od zadatka: *U kojoj točki siječe simetrala dužine AB, A(-4, 1) i B(1, -2), os ordinata?* Izravnim upisom u polje za unos konstrukciju je moguće izvesti upisom sljedećih naredbi i nakon svake p:

$$A = (-4, 1)$$

$$B = (1, -2)$$

$$a = \text{Dužina}[A, B]$$

$$s_a = \text{SimetralaDužine}[a]$$

$$T = \text{Sjecište}[yOs, s_a]$$

Nakon svake naredbe pritisnemo tipku <Enter>.

Ne moramo imenovati objekte, već možemo prepuštiti programu da to sam čini abecednim redom. Tako se točka može zadati s $(-4, 1)$, a dužina s **Dužina**[A, B]. Ako nam nije važno dobiti konstrukciju korak po korak, već samo rezultat, do rješenja možemo doći jednom ugniježđenom naredbom:

$$\text{Sjecište}[yOs, \text{Dužina}[(-4, 1), (1, -2)]]$$

Snažan alat za proučavanje funkcija

Dinamična tangenta na graf funkcije

Želimo prikazati graf funkcije $f(x) = \sin(x)$, tangentu na tu funkciju u njezinoj promjenljivoj točki, nastajanje grafa derivacije i nagib s vertikalnom katetom pravokutnog trokuta, čija je horizontalna kateta duljine 1. Upisujemo naredbe redom:

$$f(x) = \sin(x)$$

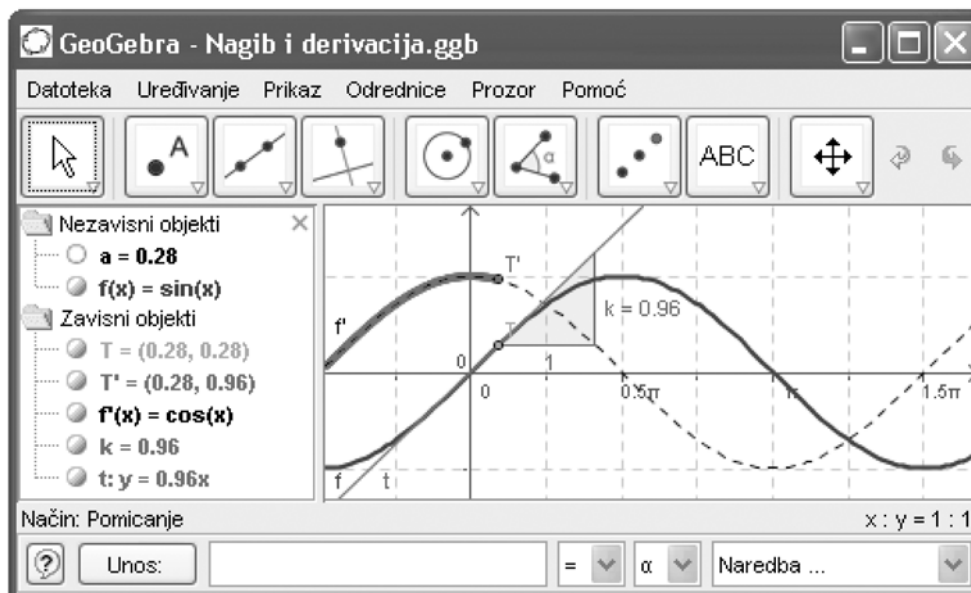
$$a = 1$$

$$T = (a, f(a))$$

$$t = \text{Tangenta}[a, f]$$

$$k = \text{Nagib}[t]$$

$$T' = (x(T), k)$$



Slika 2.

Dobivene objekte možemo dodatno urediti u pogledu boje i oblika u izborniku **Uređivanje > Svojstva** (slika 2). Biti će vrlo efektno ako točki T' uključimo trag. Kako se točka T bude gibala po grafu, točka T' će pisati graf derivacije. Podsjetimo: za animaciju točke T potrebno se prebaciti na način **Pomicanje** i kliknuti na parametar a , kojim je ta točka definirana, te strelicama na tipkovnici ili tipkama $+/-$ pomicati točku. Desnom tipkom na broj a i izborom naredbe **Pokaži objekt** u skočnom izborniku dobivamo klizač za upravljanje brojem. Primijetite da program nije samo nacrtao graf derivacije funkcije, već je napisao i njezinu jednadžbu $f'(x) = \cos(x)$ u algebarskom prozoru. Do prve derivacije mogli smo doći jednostavnim upisom $f'(x)$ u polje za unos, odnosno do druge derivacije upisom $f''(x)$. Ili upisom naredbe **Derivacija[funkcija f , broj n]**, što daje n -tu derivaciju funkcije $f(x)$.

Nultočke i ekstremi

Primijetimo da graf funkcije koji je definiran kao nezavisni objekt možemo u načinu **Pomicanje** micati mišem po crtačoj plohi. Naravno da ga prati i odgovarajuća promjena jednadžbe u algebarskom prozoru. Tako se može proučavati kakav utjecaj na jednadžbu funkcije imaju pomaci po osi x , a kakav pomaci po osi y . Možemo i zamijeniti danu funkciju, npr., funkcijom $f(x) = 0.75x^2 - 2x - 2$. To

činimo odabirom naredbe **Redefiniranje** u skočnom izborniku ili dvostrukim klikom na jednadžbu u algebarskom prozoru. Ono što smo već definirali (točka funkcije, nagib, tangenta, derivacije) time se ne gubi. Možemo još dodati nultočke i ekstrem funkcije jednostavnim naredbama: **Nultočka[f]** i **Ekstrem[f]** (slika 3).

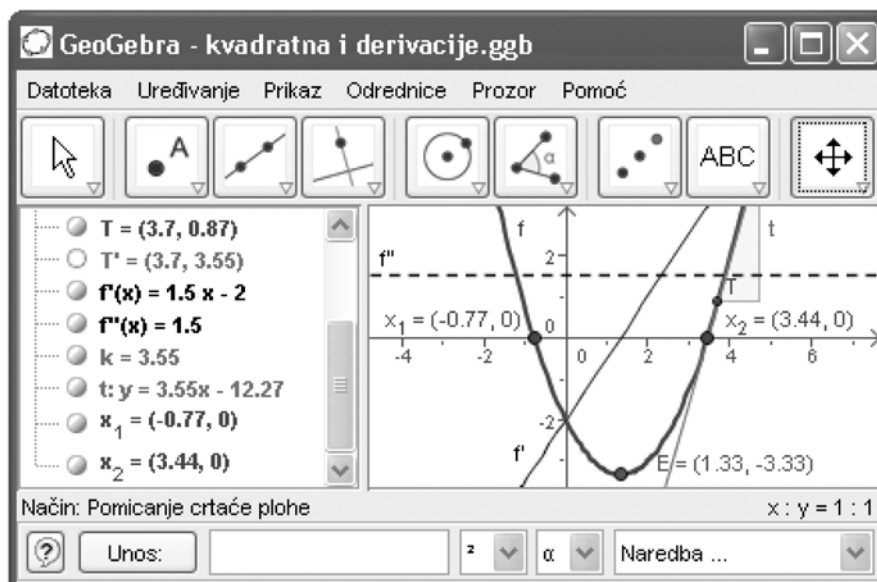
Ove dvije posljednje naredbe možemo koristiti samo za polinome. Ne mogu se primjerice dobiti ekstremi funkcije sinus ili njezine nultočke. Ipak, nultočke bilo koje funkcije moguće je dobiti naredbama:

Nultočka[funkcija f , broj a] — daje nultočku funkcije f s početnom vrijednošću a po Newtonovoj metodi;

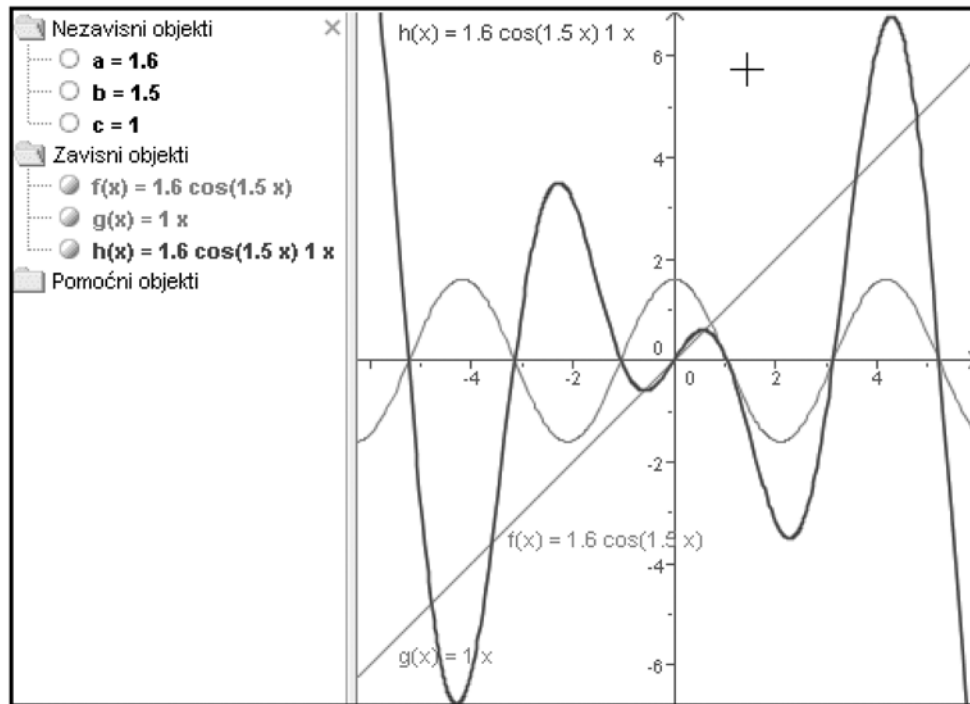
Nultočka[funkcija f , broj a , broj b] — daje nultočku funkcije f na intervalu $[a, b]$ po metodi regula falsi.

Aritmetika funkcija

Kada u **GeoGebri** zadajemo funkcije, vrlo korisno je zadavati ih općim brojevima umjesto konkretnih koeficijenata. Naravno, prije toga je potrebno definirati koeficijente. Tako se, na primjer, može zadati funkcija $f(x) = a \sin(bx + c) + d$. Time je zapravo definirana cijela obitelj krivulja. Koeficijente se lako mijenja tipkama $+/-$ na tipkovnici. Za finiju promjenu podesi se **Korak** u dijaloškom okviru **Svojstva**.



Slika 3.



Slika 4.

S definiranim funkcijama $f(x)$ i $g(x)$ moguće je izvoditi računske operacije:

- zbrajanja $f(x) + g(x)$,
- oduzimanja $f(x) - g(x)$,
- množenja $f(x) \cdot g(x)$,
- dijeljenja $f(x)/g(x)$,
- crtanje recipročne funkcije $1/f(x)$,
- potenciranje funkcije, npr., $(f(x))^3$ (u smislu množenja same sa sobom).

Na slici 4 je funkcija $h(x)$ umnožak funkcija $f(x)$ i $g(x)$. Također se izravnim upisom mogu dobiti i kompozicije funkcija: $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$, ...

Postoji niz naredbi za dobivanje sjecišta dvaju grafova funkcija ili grafa funkcije i pravca:

- **Sjecište**[*polinom f, polinom g*] daje sva sjecišta od f i g ;
- **Sjecište**[*polinom f, polinom g, broj n*] daje n -to sjecište od f i g ;
- **Sjecište**[*polinom f, pravac g*] daje sva sjecišta od f i g ;
- **Sjecište**[*polinom f, pravac g, broj n*] daje n -to sjecište od f i g ;

- **Sjecište**[*funkcija f, funkcija g, točka A*] daje sjecište od f i g s početnom vrijednošću A (za Newtonovu metodu);
- **Sjecište**[*funkcija f, pravac g, točka A*] daje sjecište od f i g s početnom vrijednošću A (za Newtonovu metodu).

Još naredbi za funkcije

- Da bismo ograničili funkciju unutar zadanog intervala $[a, b]$, trebamo koristiti naredbu **Funkcija**[*funkcija f, broj a, broj b*]. Ta naredba daje funkciju jednaku funkciji $f(x)$ definiranu samo na zadanom intervalu. Može se zadati i do tada nedefinirana funkcija. Primjer: **Funkcija**[$x^2, -1, 3$].
- Naredba **Polinom**[*funkcija f*] prikazuje funkciju f kao polinom u kanonskom zapisu. Primjer: **Polinom**[($x - 3$)²] daje $x^2 - 6x + 9$.
- Naredba **TaylorovPolinom**[*funkcija f, broj a, broj n*] daje red potencija za funkciju f u okolini točke $x = a$ reda n .
- Naredba **Integral**[*funkcija f*] daje neodređeni integral za $f(x)$. Jednadžbu i graf primitivne funkcije.
- Određeni integral funkcije $f(x)$ od a do b dobije se naredbom **Integral**[*funkcija f, broj a, broj b*].

Ova funkcija crta i površinu između grafa funkcije i x-osi.

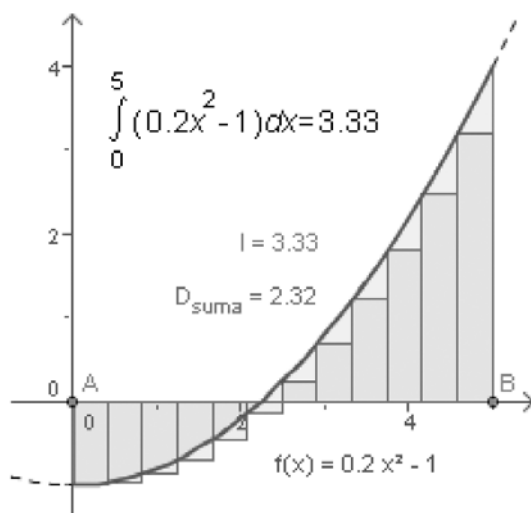
- **Integral**[funkcija f , funkcija g , broj a , broj b]. Određeni integral od $f(x) - g(x)$ od a do b . Ova naredba također crta površinu između grafova funkcija f i g .

- **DonjaSuma**[funkcija f , broj a , broj b , broj n]. Donja suma funkcije f na intervalu $[a, b]$ s n pravokutnika. Ova naredba također crta pravokutnike donje sume.

- **GornjaSuma**[funkcija f , broj a , broj b , broj n]. Gornja suma funkcije f na intervalu $[a, b]$ s n pravokutnika. Ova naredba također crta pravokutnike gornje sume.

Moćan prezentacijski alat, a jednostavan za uporabu

Govoriti o gornjim i donjim sumama da bismo došli do pojma integrala, a imati na raspolaganju samo kedu i ploču, nije baš jednostavno. Posegnemo li za slikom u knjizi ili na grafoskopskoj foliji puno je zornije, ali ni izbliza nije onako kako to može izgledati u nekom računalnom programu dinamične geometrije.



Slika 5.

A u **GeoGebri** je vrlo, vrlo lako izraditi crtež poput ovog na slici 5, sljedećim naredbama:

$$a = 0.2$$

$$b = 0$$

$$c = -1$$

$$n = 12$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$A = \text{Točka}[xOs]$$

$$B = \text{Točka}[xOs]$$

$$I = \text{Integral}[f, x(A), x(B)]$$

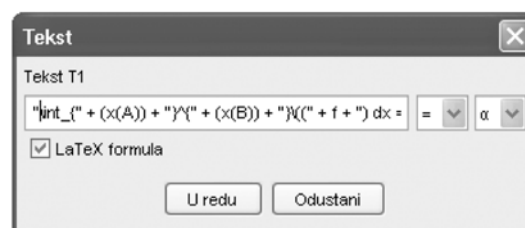
$$D_{suma} = \text{DonjaSuma}[f, x(A), x(B), n]$$

Ovaj se crtež razlikuje od statičnog po tome što je moguće mijenjati samu funkciju, granice određenog integrala i broj pravokutnika u donjoj sumi.

Dinamični tekst

Na slici 5 vidljiv je pravilan matematički zapis određenog integrala i njegova vrijednost u konkretnom slučaju. Riječ je o dinamičnom tekstu u kojem se mijenjaju granice određenog integrala kako se pomiču točka A i B , mijenja se zapis funkcije ako mijenjamo koeficijente ili funkciju u potpunosti i mijenja se iznos integrala. Načelno je dinamični tekst lako dobiti alatom **Umetanje teksta** iz alatne trake. Recimo, ako želimo dobiti vrijednost vodećeg koeficijenta a zapisanog u geometrijskom prozoru, u dijaloški okvir upišemo "Vodeći koeficijent $a =$ " + a . Problem s integralom je nešto složeniji. U dijaloški okvir (slika 6) potrebno je upisati sljedeći tekst:

"\int_{"} + (x(A)) + "}" + (x(B)) + "}" + (" + f + ") dx = " + I



Slika 6.

i pritom uključiti opciju **LaTeX formula**. Tako se mogu pisati razlomci, korijeni, vektori i ostali matematički posebni znakovi korištenjem **LaTeX** naredbi.

Domaća zadaća za dugo toplo ljeto

Toliko u ovom broju, vjerni čitatelji. Uzmite tri posljednja broja **MŠ**-a i uključite računalo i prije početka godišnjeg odmora upoznajte čari matematike uz **GeoGebra** ili se pak nakon ljetnih vrućina vratite pripremama za nastavu uz novog *pomoćnika*. Ako vam nedostaju ideje što biste mogli konstruirati i za što upotrijebiti program, svakako posjetite **GeoGebraWiki** (<http://www.geogebra.at/en/wiki/>), web mjesto na kojem se besplatno razmjenjuju *.ggb uradci. Materijali su na francuskom, engleskom, talijanskom, katalonskom, hrvatskom, španjolskom, Jedan mali programčić je okupio mnoge graditelje *kule matematičke*. No pomutnje nema jer svi razumiju univerzalni matematički jezik.

Mi još nismo ni obradili sve detalje programa, a autor programa već najavljuje vruću jesen uz inačicu 2.6.

Prilozi

Prilog 1. Aritmetičke operacije i dozvoljene funkcije

Operacija	Unos
zbrajanje	+
oduzimanje	−
množenje, skalarni umnožak	* ili razmak
dijeljenje	/
potenciranje	^ ili ² , ³
faktorijela	!
gamma funkcija	gamma ()
zgrade	()
x-koordinata	x ()
y-koordinata	y ()
apsolutna vrijednost	abs ()

Operacija	Unos
predznak	sgn ()
apsolutna vrijednost	abs ()
predznak	sgn ()
kvadratni korijen	sqrt ()
eksponencijalna funkcija	exp ()
logaritam (prirodni)	log ()
kosinus	cos ()
sinus	sin ()
tangens	tan ()
arkus kosinus	acos ()
arkus sinus	asin ()
arkus tangens	atan ()
kosinus hiperbolni	cosh ()
sinus hiperbolni	sinh ()
tangens hiperbolni	tanh ()
Area kosinus hiperbolni	acosh ()
Area sinus hiperbolni	asinh ()
Area tangens hiperbolni	atanh ()
najveće cijelo manje od ili jednako	floor ()
najmanje cijelo veće od ili jednako	ceil ()

Prilog 2. Neke $\text{\LaTeX}$ naredbe

$\text{\LaTeX}$ naredbe	Rezultat
$a \cdot b$	$a \cdot b$
$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$
$\sqrt{x}$	$\sqrt{x}$
$\sqrt[n]{x}$	$\sqrt[n]{x}$
$\vec{v}$	$\vec{v}$
$\overline{AB}$	$\overline{AB}$
x^2	x^2
a_1	a_1
$\sin \alpha + \cos \beta$	$\sin \alpha + \cos \beta$
$\int_a^b x \, dx$	$\int_a^b x \, dx$
$\sum_{i=1}^n i^2$	$\sum_{i=1}^n i^2$