Zamjena kazaljki na satu

Željko Hanjš, Zagreb i Nikola Livaja, Šibenik

Prošle godine na Državnom natjecanju iz matematike, Nikola Livaja, učitelj matematike u osnovnoj školi Petra Krešimira IV u Šibeniku ispričao je jedan zadatak o kazaljkama na satu koji je jednom bio na natjecanju za učenike osnovne škole. Nismo odmah vidjeli rješenje i to nam je ukazivalo da je zadatak jako interesantan. Tokom prošlog ljeta, kada smo bili na izletu u Pakoštanima na Vranskom jezeru, ponovo smo ga se sjetili. Na kraju se ispostavilo da je problem zaista veoma zanimljiv i da se mogu dobiti i neki dodatni rezutati.

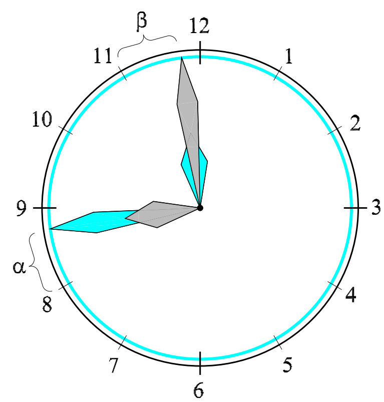
Evo zadatka koji smo imali na samom početku.

Sat pokazuje vrijeme između 8 i 9 sati. Ako se zamijene velika i mala kazaljka, on pokazuju vrijeme između 11 i 12 sati.

1) Koje vrijeme pokazuje sat u svakom od ova dva slučaja?

2) Kolika je razlika vremena koje on pokazuje u ta dva trenutka?

Da bismo odgovorili na ova pitanja najprije ćemo napraviti matematičku formulaciju problema. Neka je duljina luka vrha velike kazaljke između dva uzastopna sata jednaka 1 (to znači da je opseg kružnice koju opisuje vrh velike kazaljke jednak 12). Ako se mala kazaljka pomakne od oznake za sat k do $k+1$, onda protekne 60 minuta. Ako se velika kazaljka pomakne od oznake za sat k do $k+1$, onda protekne 5 minuta.



U danom su zadatku mala kazaljka sata u prvom i velika u drugom slučaju na lučnoj udaljenosti α od oznake za sat 8, $0 < \alpha < 1$. Velika kazaljka u prvom i mala u drugom slučaju na lučnoj su udaljenosti β od oznake za sat 11, $0 < \beta < 1$.

Od 8 sati do trenutka koji promatramo proteklo je $\alpha \cdot 60$ minuta, a to je jednako vremenu koje pokazuje velika kazaljka. Ono je jednako $5(11+\beta)$. Time dobivamo jednadžbu

$$\alpha \cdot 60 = 5(11+\beta).$$

Promatrajući kazaljke i vrijeme između 11 i 12 sati dobivamo jednadžbu

$$\beta \cdot 60 = 5(8 + \alpha).$$

Rješenje ovog sistema od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice je

$$\alpha = \frac{140}{143}, \quad \beta = \frac{107}{143}.$$

Tražena vremena su

$$T_8 = [(8+\alpha)\cdot 60]' = 8^{\mathrm{h}} \left(58\frac{106}{143}\right)',$$

$$T_{11} = [(11+\beta)\cdot 60]' = 11^{\mathrm{h}} \left(44\frac{128}{143}\right)'.$$

Razlika vremena je

$$T_{11} - T_8 = 11^{\mathrm{h}} \left(44\frac{128}{143}\right)' - 8^{\mathrm{h}} \left(58\frac{106}{143}\right)' = 2^{\mathrm{h}} \left(46\frac{2}{13}\right)'.$$

Sada možemo lako dokazati sljedeću, općenitiju tvrdnju.

Sat pokazuje vrijeme između k i $k+1$ sati, gdje je $0 \le k \le 10$. Ako se zamijene velika i mala kazaljka, on pokazuje vrijeme između l i $l+1$ sati, gdje je $0 \le k < l \le 11$.

1) U tim trenucima sat pokazuje vremena

$$T_k = k^h \left(\frac{12l+k}{143}\cdot 60\right)', \qquad T_l = l^h \left(\frac{l+12k}{143}\cdot 60\right)', \tag{1}$$

gdje su T_k i T_l vremena koja pokazuje sat u prvom i drugom slučaju.

2) Razlika vremena koja sat pokazuje u ta dva trenutka jednaka je

$$T_l - T_k = \left[\left(55\frac{5}{13}\right)(l-k)\right]'. \tag{2}$$

Istim zaključivanjem kao u prethodnom slučaju dobivamo sistem od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\alpha \cdot 60 = 5(l+\beta),$$
$$\beta \cdot 60 = 5(k+\alpha), \qquad 0 < \alpha, \beta < 1,$$

čije rješenje je

$$\alpha = \left(\frac{12l+k}{143}\right), \qquad \beta = \left(\frac{l+12k}{143}\right).$$

Odavde se dobivaju rješenja T_k i T_l u (1).

Nakon malo sređivanja dobije se

$$T_l - T_k = (l-k)\cdot 60 + \left(\frac{l+12k}{143} - \frac{12l+k}{143}\right)\cdot 60 = \frac{720}{13}(l-k) = \left(55\frac{5}{13}\right)(l-k) \text{ minuta.}$$

Zanimljivo je da se drugi može dobiti i bez poznavanja vremena koja su dobivena u prvom slučaju.

Odgovor se traži na ovaj način.

Neka je α lučna udaljenost male kazaljke od oznake za sat k, a β lučna udaljenost male kazaljke od oznake za sat l. U prvom slučaju je

$$T_k = k\cdot 60 + (l\cdot 5 + \beta\cdot 5),$$
$$T_l = l\cdot 60 + (k\cdot 5 + \alpha\cdot 5), \quad 0 < \alpha, \beta < 1.$$

Odavde je

$$T_l - T_k = 55\cdot(l-k) + 5\cdot(\alpha - \beta). \tag{3}$$

Računanjem vremena samo pomoću male kazaljke, izlazi:

$$T_k = (k+\alpha)\cdot 60, \quad T_l = (l+\beta)\cdot 60.$$
$$T_l - T_k = (l-k)\cdot 60 - 60\cdot(\alpha-\beta). \tag{4}$$

Iz (3) i (4) slijedi

$$55\cdot(l-k) + 5\cdot(\alpha-\beta) = (l-k)\cdot 60 - 60\cdot(\alpha-\beta),$$

tj. $\alpha - \beta = \frac{l-k}{13}$. Sada je

$$T_l - T_k = \left(55\frac{5}{13}\right)(l-k) \text{ minuta.}$$

Ako je $l = k+1$, onda je $T_{k+1} - T_k = 55\frac{5}{13}$ minuta, a ako je $l = 11$, $k = 0$, onda je $T_{11} - T_0 = 664\frac{8}{13}$ minuta $= 11^{\mathrm{h}}\ (4\frac{8}{13})' = 12^{\mathrm{h}} - (55\frac{5}{13})'$.