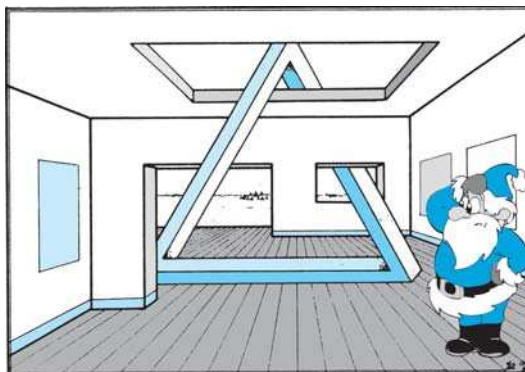


Jednostavno nemoguće!

Sandra Gračan, Zagreb



Je li vam se ikada dogodilo da gledate sliku i vidite na njoj objekte sasvim jasno, a pritom osjećate da tu “nešto ne štima”? Nemogući objekti predmeti su koje možemo zamisliti i nacrtati, no nemoguće ih je zaista napraviti. Iako su prilično uvjerljivi, oni u trodimenzionalnom svijetu ne postoje.

Mogućnost zamišljanja i crtanja nemogućih predmeta i njihova uvjerljivost upravo su ono što im daje draž i čini ih atraktivnima. Na sljedećih nekoliko stranica **MŠ**-a zavirit ćemo u taj tajanstveni svijet.



U čemu je trik?

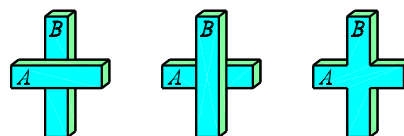
Ono što ćemo zapravo promatrati samo je niz linija ispisanih na komadu papira! Ipak, činit će se da vidimo čvrste objekte. U tome i jest prvi trik nemogućih predmeta — na njega ćemo odmah “nasjesti”.

Gledanje je prilično složen proces u kojem oko šalje sliku predmeta u obliku živčanih impulsa mozgu. Mozak je taj o kojem ovisi interpretacija i shvaćanje viđenog. Pri tom veliku ulogu imaju iskustvo i pretpostavke koje smo stvorili na temelju već viđenog.

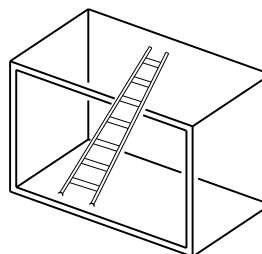
Postoje tri osnovna pokazatelja na temelju kojih izvodimo zaključke o položaju i ori-

jentaciji nacrtanog predmeta. To su:

- 1. prekrivanje i spajanje** — predmet ili dio predmeta koji se nalazi iza ili ispod, ne vidi se, prekriven je predmetom ili dijelom koji je ispred ili iznad. Na prvoj slici *A* je ispred *B*, na drugoj je *B* ispred *A*, a na trećoj su *A* i *B* spojeni, tj. na jednakoj udaljenosti.

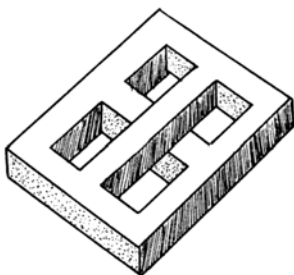


Stavimo li u kontradikciju taj pokazatelj, eto nemogućeg: ljestve idu iznutra, a završavaju izvan kutije!

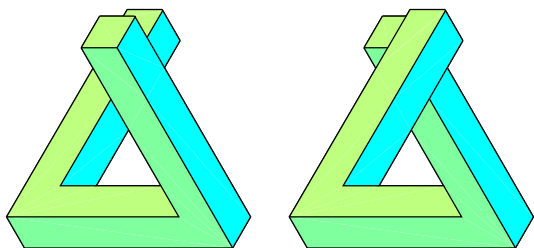


- 2. povezanost ravnine** — daje nam informaciju koji dijelovi predmeta leže u istoj ravnini ili su na jednakoj udaljenosti. Kombiniramo li prekrivanje i povezanost, dva kontradiktorna pokazatelja položaja na istoj slici, evo još jednog jednostavnog nemogućeg predmeta.





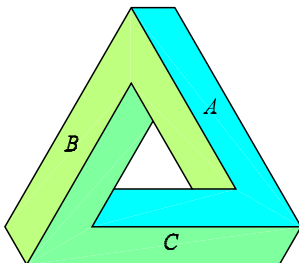
3. orijentacija — jednostavna tijela, poput kocke, kvadra i sl., jasno nam pokazuju svojim stranama smjerove i položaj u prostoru. Na lijevoj slici nema problema u razumijevanju, dok na desnoj nije sve baš sasvim jasno, orijentacija se ne poštuje na cijeloj slici jednako. Čini se da se lijevi kvadar udaljuje, a desni približava promatraču, ali način na koji se prekrivaju govori upravo suprotno.



Nemogući trokut

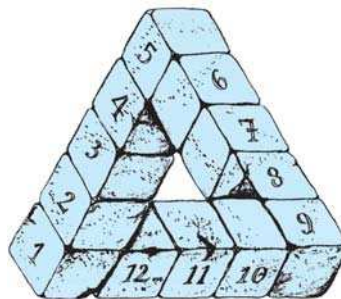
Neobična stvarčica

Upoznajmo se s prvim nemogućim objektom. To je nemogući trokut — nazovimo ga **trikut** — čije “stranice” su tri kvadra. Što



je tu neobično? Pogledamo li trikut pažljivije, vidimo da su u gornjem kutu kvadri *A* i *B* okomiti, u lijevom kutu su *B* i *C* okomiti, a u desnom kutu se pak kvadri *C* i *A* spajaju pod pravim kutom. Nemoguće?!

Na sljedećoj slici pogledajte kako “složiti” trikut. On na jedan specijalan način zaista postoji, zar ne?! Priznajte, crtež izgleda vrlo uvjerljivo i premda znamo da to “ne ide”, nije se lako osloboditi osjećaja da možda ipak...



Osim toga, sličica nas naprosto “vuče” da izračunamo volumen i oplošje trikuta. Pretpostavimo li da svaka kocka ima duljinu stranice 1 cm, tada je svaka stranica trikuta duga 5 cm. Volumen tada iznosi 12 cm^3 , a oplošje je 48 cm^2 . Stvar je “samo” u prebrojavanju kockica!

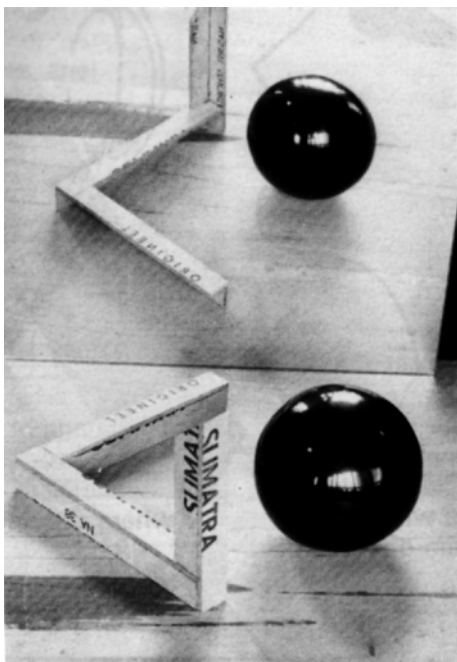
Gruba stvarnost

Trikut u punoj njegovoj ljepoti možete vidjeti na stranicama panoptikuma. Dokazuje li to da je zaista moguće napraviti nemogući trokut? Naravno da ne.

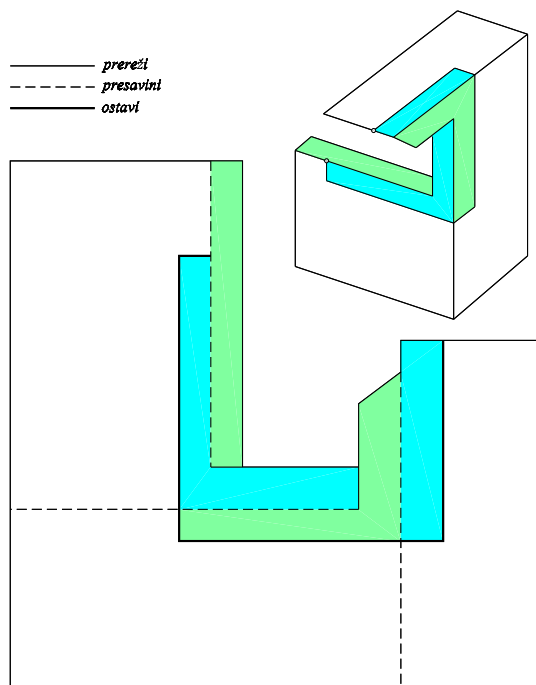
Pokušajte zamisliti kako izgleda ako bismo ga samo malo zarotirali ili promatrali iz nešto drugačijeg kuta. Znamo da se kvadri od kojih se sastoji trikut u stvarnom prostoru ne dodiruju. Osim toga, povučemo li pravce kroz osi kvadara *A*, *B* i *C*, dobit ćete trokut s tri prava kuta! Promatramo li pak tri međusobno okomite ravnine *A*, *B* i *C*, po svim pravilima Euklidske geometrije trebale bi se sjeći u jednoj točki.

Na sljedećoj fotografiji u zrcalu vidi se kako zapravo izgleda fotografirani model.





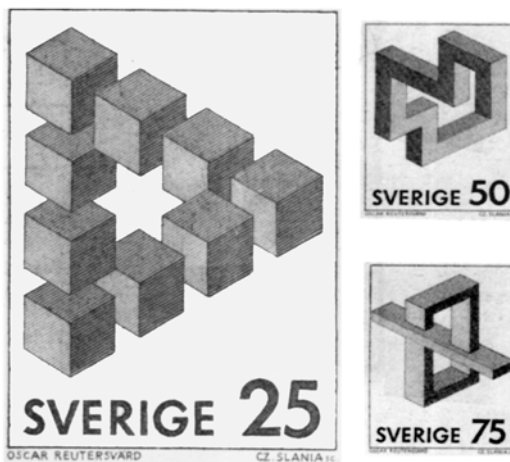
Možete i vi izraditi trodimenzionalni model od kartona, dio kojeg, gledate li iz točno određenog kuta, vidite kao nemogući trikut. Naravno, to nije “pravi” trikut, on je zaista nemoguć! Evo sheme.



Ljudska mašta može svašta...

Nemogući trokut može se iskoristiti kao osnova pri crtanju drugih nevjerojatnih objekata. Djelić onoga što nastane kad ljudi puste mašti na volju možete pogledati u panoptiku-mu.

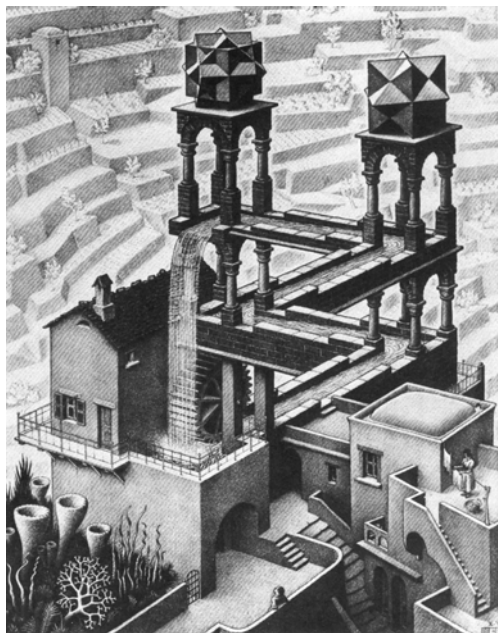
Godine 1934. švedski umjetnik Oscar Reutersvärd nacrtao je kompoziciju od devet kockica i prvi nemogući trokut je stvoren. On je nastavio eksperimentirati s nemogućim objektima i rezultat toga je nekoliko stotina crteža. 1982. godine švedska pošta je njemu u spomen izdala seriju od tri marke s njegovim nemogućim objektima.



1958. godine L. S. i R. Penrose, otac i sin, objavili su kratki članak u časopisu *British Journal of Psychology*: “Nemogući objekti, posebna vrsta iluzije” (“Impossible objects, a special kind of visual illusion”). U njemu prvi put opisuju nemogući trokut koji se od tada, njima u čast, naziva “Penroseov trokut” kao i nemoguće stepenice o kojima će biti riječi nešto kasnije. Više o Sir Rogeru Penroseu možete pročitati na internet adresi <http://www.worldofescher.com/misc/penrose.html>.



Njemački umjetnik, grafičar M. C. Escher, (o kome smo već pisali u **MŠ**-u br. 10), najzaslužniji je za popularizaciju nemogućih objekata. Najpoznatija je njegova litografija “Vodopad”, prodana u više od 160 000 primjeraka! Na toj slici uočite dva nemoguća trokuta. Čini se da voda mirno teče prema dolje, a ipak završava na višem položaju odakle se slijeva na mlin u obliku vodopada. Escher je na toj slici briljantno iskoristio trikut kako bi kreirao pravi “perpetuum mobile”.

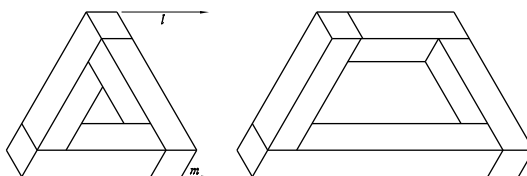


Nemogući četverokut

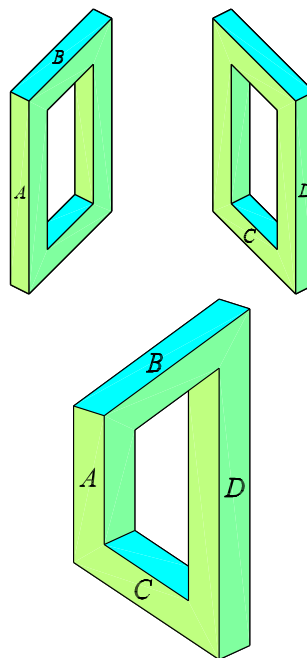
Korak dalje

Nemogući četverokut — četirikut ili, možda bolje rečeno, nemogući okvir dobije se lako “razvlačenjem” trikuta udesno:

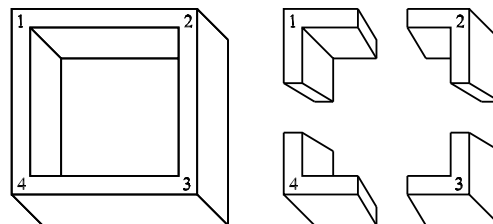
Sastoji se od dva paralelna kvadra i dva kvadra postavljena “u križ” pod pravim kutom, a sva četiri čine čvrsti okvir. Pogledate li crteže “normalnih” prozorskih okvira, uočite

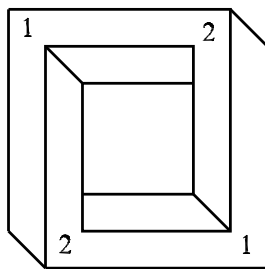


ćete kako je nemogući okvir njihova nemoguća kombinacija. Stupovi A i B s lijevog okvira spojeni su sa stupovima C i D s desnog okvira.



Nemoguće okvire možemo sastaviti i na nekoliko drugačijih načina. Uočimo da postoje točno 4 različita kuta (na donjoj slici su označeni brojevima 1, 2, 3 i 4) jednog “normalnog” okvira. Nemoguće okvire sastavljamo kombinirajući neke od tih kutova. Na slici vidimo kombinaciju (1,2,1,2), a sami se možete poigrati i nacrtati okvir sastavljen od kutova (4,4,4,4), ili npr. (4,1,4,1).



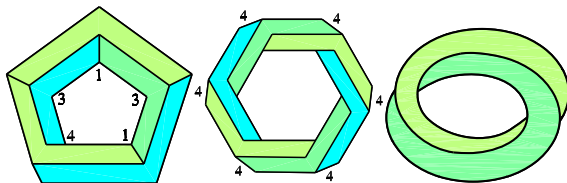


Poopćenje?

Što je s multikutovima? Može se pretpostaviti da će takvi nemogući objekti biti još interesantniji. No, ipak nije tako. Dva su glavna razloga.

1. Na papiru su najdojmljiviji i najuvjerljiviji crteži pravog kuta. Snaga trikuta i četirikuta je upravo u tome što se čini da su svi kutovi pravi! Što su kutovi veći od 90° , manje su efektni.
2. Složenost je drugi razlog. Što je više linija i stupova, uočava se manje kontradiktornosti.

Evo nekoliko sličica, pa prosudite sami.

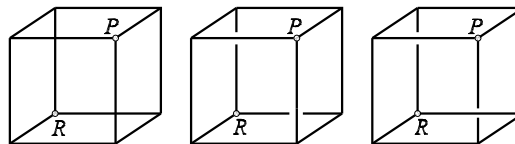


Nemoguće kocke

Želimo li ipak korak dalje, onda je zanimljivo pogledati još jednu vrstu nemogućih objekata: nemoguće kocke.

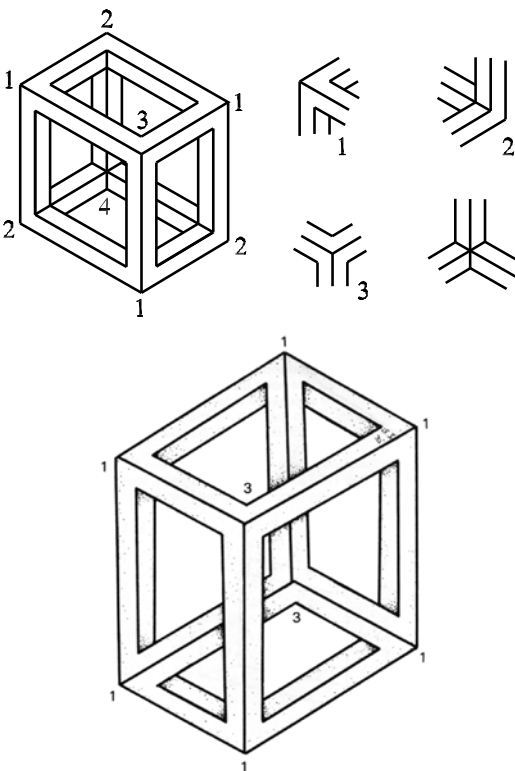
Prva kocka nacrtana je sa svih 12 bridova jednake debljine. To je tzv. Neckerova kocka. Nije sasvim jasno promatramo li je odozgo ili odozdo i koja od točaka R i P je na prednjoj strani. Želimo li promatraču dati informaciju što je ispred a što iza, nacrtat ćemo nevidljive

linije tanje, ili prekinuti bridove koji se nalaze iza — druga sličica izgleda sasvim u redu, točka R je iza, a točka P na prednjoj strani.



No, što ako tu nešto “pobrkamo”? Mala promjena na trećoj sličici daje oku do znanja koji bridovi su bliži i sada zaključujemo da su točke P i R jednako udaljene od promatrača! Jednostavna i uvjerljiva iluzija!

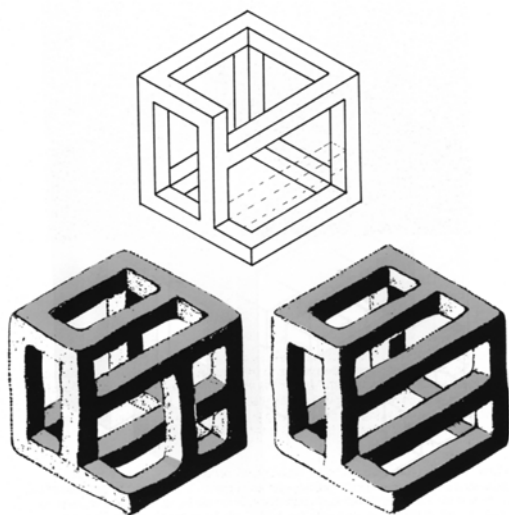
Evo još jednog načina na koji možete nacrtati nemoguću kocku: promatrajte četiri različita vrha “obične” kocke i (kao i kod četirikuta) isprobajte nemoguće kombinacije.



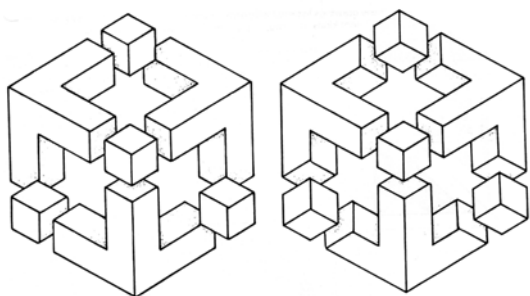
Pri “konstrukciji” ipak treba paziti da se ne pretjera s kontradiktornostima jer se slika može raspasti na niz besmislenih linija.

Nadalje, možete nacrtati i kocke s nemogućim spojevima...





... ili pak kocke čiji dijelovi su promatrani svaki iz svoje perspektive:



Čini se da ljudska mašta zaista nema granica. Tu je Escher bio pravi majstor. Pogledajmo gore desno njegovu litografiju "Vidikovac", baziranu na nemogućoj kocki. Stvarno i nestvarno isprepliće se u pravoj mjeri i slika ostavlja snažan dojam.

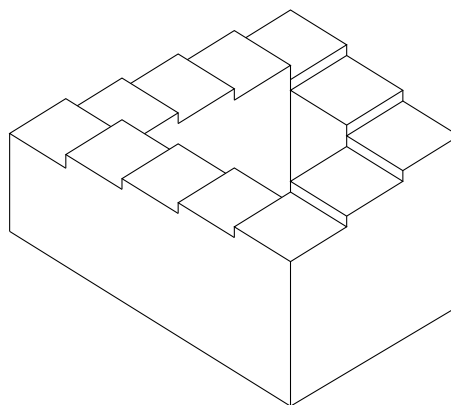


Nemoguće stube

Upoznajmo se sada s još jednim nemogućim objektom: Penroseovim stepeništem. To je niz stepenica povezanih u zatvorenu cjelinu tako da se u pozitivnom smjeru beskrajno penjete, a u negativnom smjeru spuštate.



Kako je to moguće? Pa sve izgleda sasvim ispravno. Skoro!

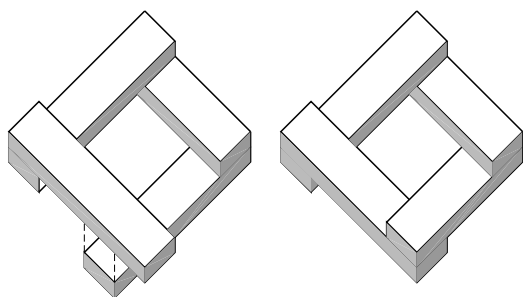


Kako bi nam varka bila jasnija, pogledajmo stepenište sa samo četiri stepenice. Na slici lijevo sasvim je jasno da se stepenice spuštaju u smjeru kazaljke na satu i vidi se razlika u visini prve i četvrte stepenice. No, na desnoj slici prva i četvrta stepenica pro-

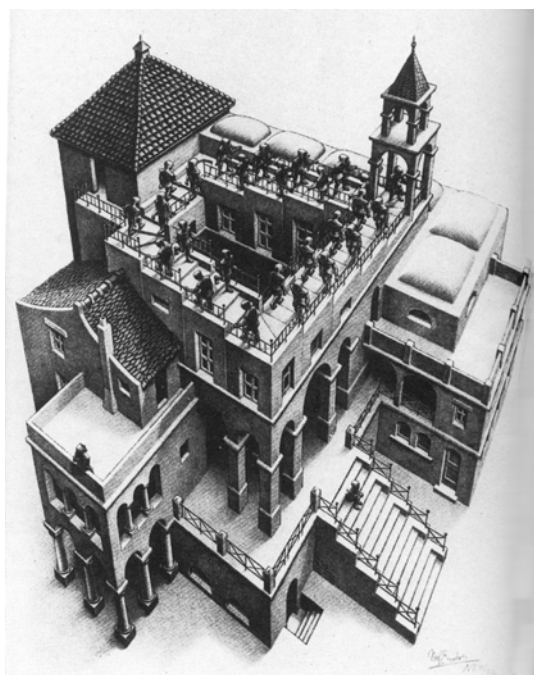




mijenile su položaj: najviša stepenica se našla ispod najniže i dobili smo beskrajni krug. Povećamo li broj stepenica, iluzija je još upečatljivija.

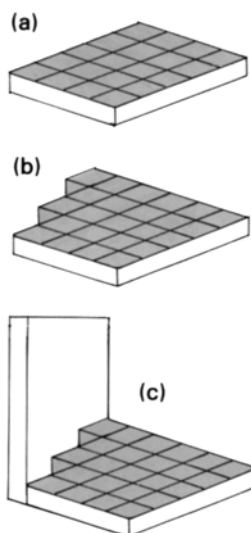


Vratimo se sada i po treći put M. C. Escheru. Ovoga puta pogledajmo njegovu litografiju “Uspinjanje i silaženje”. Litografija prikazuje Penroseovo stepenište po kojem u beskraj kruže zakrabuljeni ljudi jedni mimo drugih tako da se jedni stalno spuštaju, a drugi se pak stalno uspinju. Čini se da se svakih pola kruga mimoiću isti ljudi. Zgodno, zar ne?

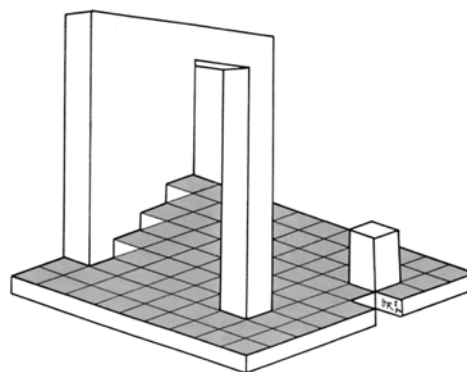


U ravni, a ipak se uspinje...

Sljedeća tri crteža pokazuju nam još jedan način “zbunjivanja protivnika”.



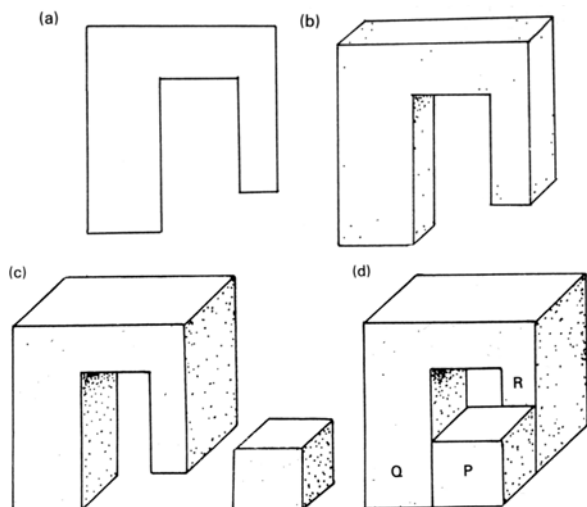
Na slici a) nema problema s interpretacijom viđenog: to je ravna, kvadratima popločena ploha određene debljine. Na slici b) jedan rub plohe je nazubljen što će naše oko jako asocirati na stepenice. Dodamo li još niz vertikalnih linija u obliku zida uz taj rub, onda će zaključak biti da se na tom dijelu crteža zaista radi o stepenicama. Ostaje naravno problem objasniti kako to da je desni rub i dalje ravan. Dodate li još nekoliko detalja i evo lijepog nemogućeg objekta:





I blizu i daleko

Sljedeći niz sličica pokazat će nam kako nastaje predmet čija površina je istovremeno na dvije različite udaljenosti od promatrača:

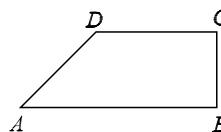


Na slici a) lik je nesumnjivo ploha u ravni. Na slici b) lik dobiva debljinu, no njegova prednja ploha još uvijek je ravna i jednako udaljena od promatrača. Također vjerujemo da je i stražnja strana predmeta ravna ploha. Na slici c) predmet postaje još deblji i na sceni se pojavljuje mala kocka. Još uvijek nema problema. Na slici d) kocka je pomaknuta i evo konflikta. Točke Q i P jednako su udaljene od promatrača, kao i točke Q i R . No, točka P je nesumnjivo bliža od točke R .



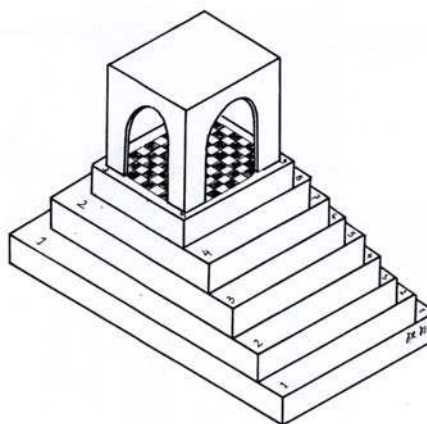
I horizontalno i vertikalno

U stvarnosti ravna ploha ne može istovremeno biti polegnuta i uspravna. Evo načina na koji možemo i to postići. Pogledajte trapez $ABCD$:



Usmjerimo li svoju pažnju samo na lijevi rub trapeza, (desni pokrijte rukom), crtež možemo interpretirati kao horizontalnu plohu, dok bismo, gledajući samo desni kraj, pretpostavili da se radi o vertikalnoj plohi.

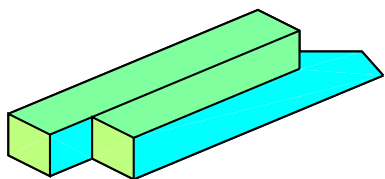
Dodamo li sada crtežu još više detalja koji će nas navoditi na kontradiktorne zaključke, dobili smo još jedan nemogući objekt. Pogledajte ovu neobičnu stepenastu piramidu — hram nemogućeg. Broj stepenica sa svake strane te piramide je drugačiji!



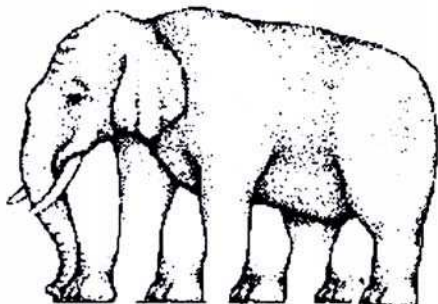
Površine koje nestaju

Posebnu grupu nemogućih predmeta čine predmeti s različitim ulogama površina. Na jednom kraju crteža površina će biti dio predmeta, a na drugom kraju dio pozadine. Evo jedne zanimljive sličice koju je nacrtao Zenon Kulpa. Gledamo li lijevi dio slike, vidimo dva različita stupa, ali desni dio prikazuje samo jedan stup i njegovu sjenu... Drugi stup se jednostavno rastopio.

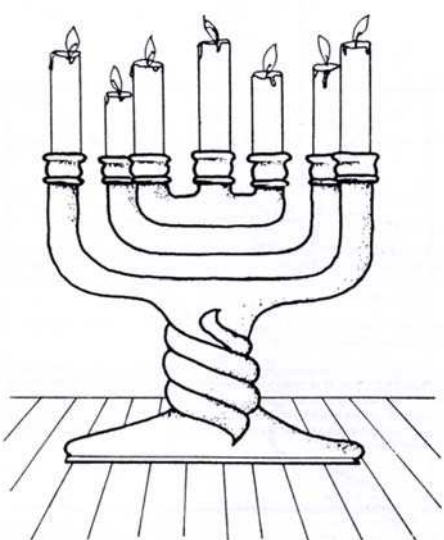




Priznajte, nije lako odgovoriti na pitanje koliko nogu ima ovaj slon...



...ili kako ove svijeće stoje na svijećnjaku:



To nije sve...

Ovo je, naravno, samo dio priče o nemogućim predmetima. Proučavanje nemo-

gućih predmeta sigurno nije grana matematike, iako se u njihovu opisivanju i analizi rabe matematičke metode. Zanimljivo je da je više od stotinu članaka napisanih na tu temu objavljeno u kompjutorskim časopisima, naime, nemogući predmeti trebali bi pomoći u razumijevanju i stvaranju programa koji bi omogućili robotima da "vide".

Možda bi nemogući predmeti bili zanimljiva tema i učenicima, čiji zadatak bi bio matematičkim metodama dokazati njihovu nemogućnost. Kako su to napravili slovenski učenici 3. i 4. razreda kamniške gimnazije, možete pogledati u posebnom broju slovenskog časopisa "Logika in razvedrilna matematika" (sedmo godište, 1997–1998, br. 4).

Na kraju, znate li lijepo crtati, možda dobijete želju da se sami okušate u stvaranju nemogućih predmeta. Bilo bi lijepo vidjeti vaših ruku djelo. Pišite nam!

A za one koji će radije samo gledati, evo adrese web stranica na kojima možete pogledati neobične objekte i predmete Oscara Reutersvārda, Brune Ernsta i ostalih autora: <http://www.palmyra.demon.co.uk/illusion/oscar/oscar.htm>. Pogledajte!

Bruno Ernst pseudonim je nizozemca J. A. F. de Rijka. Fasciniran nemogućim objektima, upoznao se s većinom vodećih umjetnika i znanstvenika koji su proučavali nemoguće predmete. U jesen 1986. godine u Utrechtu organizirao je međunarodnu izložbu posvećenu nemogućim objektima. Pratio je Escherov rad i pisao članke o Escherovim litografijama, a zatim je izdao knjigu o njegovom životu i radu. Oduševili su ga i radovi Oscara Reutersvārda, a i drugih autora, pa je 1985. godine objavio knjigu o nemogućim objektima "Avanture s nemogućim figurama", ("Adventures with impossible figures", prijevod na engleski je u izdanju Tarquin publications, 1986.). Ovaj članak posljedica je čitanja (i gledanja) te knjige.

