Kineska igra NIM

U drevnoj Kini igrala se jedna lijepa i jednostavna igra poznata pod nazivom NIM. Igru igraju dva igrača. U čemu se igra sastoji?

Izvjesna količina kamenčića (ili šibica) razvrsta se u tri grupice. Igrači naizmjenično uzimaju kamenčiće, pri čemu pojedini igrač pri svojem potezu uzima po volji mnogo kamenčića, no iz samo jedne (bilo koje) skupine, a može pokupiti i cijelu skupinu kamenčića, dakako i opet samo jednu.

Pobjednik je onaj koji uzme posljednji kamenčić.

Pitanje je kakav je ishod igre pri optimalnoj taktici obaju igrača i u čemu se ta taktika sastoji?

Pretpostavimo da su u tri hrpice a, b i c kamenčića. Zapišimo te brojeve u binarnom sustavu:

$$a = a_m \cdot 2^m + a_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0,$$

$$b = b_m \cdot 2^m + b_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot 2 + b_0,$$

$$c = c_m \cdot 2^m + c_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \ldots + c_1 \cdot 2 + c_0.$$

Znamenke a_0, b_0, c_0, $\ldots$, a_m, b_m, c_m su 0 ili 1, ali barem neka od znamenki a_m, b_m i c_m je različita od nule.

Promotrimo sada zbrojeve

$$a_m + b_m + c_m,\ a_{m-1} + b_{m-1} + c_{m-1},\ \ldots,\ a_0 + b_0 + c_0. \qquad (*)$$

Svaki od njih jednak je 0, 1, 2 ili 3. Ako je barem jedan od tih zbrojeva neparan, dakle jednak 1 ili 3, tada igrač koji povlači prvi potez, uz točnu igru pobjedjuje.

Uzmimo da je $a_k + b_k + c_k$ prvi neparni zbroj od zbrojeva $(*)$ gledajući slijeva udesno. Tada je barem jedna od znamenki a_k, b_k i c_k jednaka 1. Neka je primjerice $a_k = 1$. Igrač na potezu može uzeti iz prve grupice takvu količinu kamenčića, da se brojevi a_m, $\ldots$, a_{k+1} ne promijene, da umjesto a_k ima 0, a svaki od brojeva na pozicijama a_{k-1}, a_{k-2}, $\ldots$, a_0 da ima vrijednost 0 ili 1, već prema želji igrača. Na taj način on može postići da svi brojevi $a_{k-1} + b_{k-1} + c_{k-1}$, $\ldots$, $a_0 + b_0 + c_0$ budu parni.

Drugim riječima, igrač koji je prvi na potezu može postići da sve sume $(*)$ budu parni brojevi. Drugi igrač svojim potezom neizbježno će izmijeniti parnost neke od tih suma, pa je nakon toga opet ista pozicija za prvog igrača. Kako on uvijek uspostavlja "stanje parnosti", kad-tad će se doći do situacije da su svi zbrojevi u $(*)$ nule i time prvi igrač pobjedjuje.

Ako su u početnom položaju sve sume $(*)$ parni brojevi, drugi će igrač slijediti opisanu taktiku i pobijediti.

Tako je konačan ishod igre potpuno odredjen već samim izborom brojeva a, b i c.

Zgodno je primijetiti kako trojka brojeva koja je povoljnija za drugog igrača rjeđe nastupa negoli je to slučaj za prvoga. Tako primjerice, ako igramo s 10 kamenčića ($a+b+c = 10$), ukupno je 9 mogućih njihovih rasporeda u tri grupice, od čega je čak u 8 u prednosti prvi igrač, koji točnom igrom dolazi do pobjede, a samo je jedan slučaj povoljniji za drugog igrača.