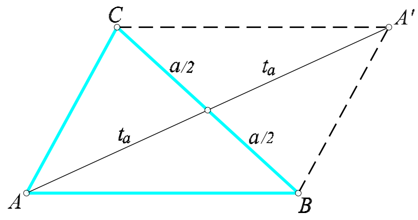


Nadalje, kako formula (1) vrijedi za sve tri težišnice (ciklički):

$$4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$
$$4t_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$$
$$4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2,$$

zbrajanjem ovih jednadžbi dobijemo:

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Dakle: zbroj kvadrata duljina težišnica i zbroj kvadrata duljina stranica trokuta odnose se kao 3 : 4. Zgodno, zar ne?

* * *

Na Općinsko–gradskom natjecanju 5. ožujka 1999. god. za 2. razred postavljen je zadatak:

2. Ako je $abc \neq 0$, je li moguće da svaka od ove tri jednadžbe

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$cx^2 + ax + b = 0,$$
$$bx^2 + cx + a = 0,$$

ima realna rješenja?

Ponuđeno je rješenje:

“Pretpostavimo da svaka jednadžba ima realna rješenja. Tada je diskriminanta svake od njih nenegativna, tj.

$$b^2 \geq 4ac, \quad a^2 \geq 4bc, \quad c^2 \geq 4ab.$$

Množenjem ovih nejednakosti dobivamo

$$a^2b^2c^2 \geq 64a^2b^2c^2,$$

što nije istina, jer je $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Ova kontradikcija znači da polazna pretpostavka nije istinita, tj. barem jedan od polinoma ima čisto kompleksno rješenje.”

Međutim, malom analizom vidi se npr. da za

$$2x^2 + x - 3 = 0, \quad D = 25 > 0,$$
$$3x^2 - 2x - 1 = 0, \quad D = 16 > 0,$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad D = 1 > 0,$$

ponuđeno rješenje nije točno! Kasnije je to ispravljeno u “EM 12”, str. 23 još jednim primjerom. Pa, gdje je nastao problem (a nastao je!)?

Sastavljač je vjerovatno previdio da

$$a^2 \geq bc, \quad b^2 \geq ac, \quad c^2 \geq ab$$

ne znači nužno $a^2 \geq |bc|$, $b^2 \geq |ac|$, $c^2 \geq |ab|$.

Umjesto ispravljenog rješenja trebalo je ispraviti zadatak i to uvjet $abc \neq 0$ postaviti kao $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Tada je originalno ponuđeno rješenje točno i logično.

* * *

Na Općinsko–gradskom natjecanju 2. ožujka 2001. god. za 2. razred postavljen je zadatak:

1. Brojevi x i y zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$x + y + \frac{x}{y} = 19,$$
$$\frac{x(x+y)}{y} = 60.$$

Koje sve vrijednosti može poprimiti $x + y$?

Ponuđeno je rješenje:

“Izrazimo li $\frac{x}{y}$ iz druge jednadžbe i uvrstimo u prvu, dobivamo

$$x + y = \frac{60}{x+y} = 19$$

pomnožimo li ovu jednadžbu s $x + y$, dobivamo kvadratnu jednadžbu s nepoznanicom $x + y$,

$$(x+y)^2 - 19(x+y) + 60 = 0.$$

Njezina su rješenja $(x+y)_1 = 4$ i $(x+y)_2 = 15$. Treba još vidjeti je li se ove vrijednosti mogu postići.

Za $x+y=4$ je $\frac{x}{y}=\frac{60}{x+y}=15$, odakle je $x=\frac{15}{4}$, $y=\frac{1}{4}$.

Za $x+y=15$ je $\frac{x}{y}=\frac{60}{x+y}=4$, odakle je $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{15}{4}$.

Dakle, $x+y$ zaista može poprimiti vrijednosti 4 i 15."

Kao prvo, ovo je tipičan primjer sustava kojeg rješavamo uvođenjem novih nepoznanica:

$$x+y+\frac{x}{y}=19,$$
$$\frac{x}{y}\cdot(x+y)=60, \quad y\neq 0.$$

Stavimo $x+y=a$, $\frac{x}{y}=b$, te imamo sustav simetričnih jednadžbi

$$a+b=19,$$
$$ab=60,$$

čija su rješenja $(4{,}15)$ i $(15{,}4)$, pa $x+y$ zaista može poprimiti vrijednosti 4 i 15.

Ako tražimo x i y, onda slijede dva slučaja:

$$\begin{aligned}
&x+y=4\\
&\frac{x}{y}=15\\
\hline
&y=4-x\\
&\frac{x}{4-x}=15, \quad x\neq 4\\
&x=60-15x\\
&16x=60\\
&x=\frac{15}{4}\\
&y=\frac{1}{4},
\end{aligned}$$

što je u ponuđenom rješenju točno. No, u drugom je slučaju:

$$\begin{aligned}
&x+y=15\\
&\frac{x}{y}=4\\
\hline
&y=15-x\\
&\frac{x}{15-x}=4, \quad x\neq 15\\
&x=60-4x\\
&5x=60\\
&x=12\\
&y=3,
\end{aligned}$$

a u ponuđenom je rješenju stajalo $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{15}{4}$, što nije točno zbog

$$\frac{1}{4}+\frac{15}{4}+\frac{\frac{1}{4}}{\frac{15}{4}}=4\frac{1}{15}\neq 19.$$

Malo više pažnje ne bi škodilo, zar ne?!

* * *

Na Županijskom natjecanju 6. travnja 2001. god. za 2. razred postavljen je zadatak:

1. Odredite sve parove (x,y) realnih brojeva za koje vrijedi

$$\log_2\left[2\cos^2(xy)+\frac{1}{2\cos^2(xy)}\right]-1=-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Ponuđeno je rješenje:

"S obzirom da su $2\cos^2(xy)$ i $\frac{1}{2\cos^2(xy)}$ pozitivni brojevi, možemo primijeniti *AG* nejednakosti:

$$2\cos^2(xy)+\frac{1}{2\cos^2(xy)}$$
$$\geq 2\sqrt{2\cos^2(xy)\frac{1}{2\cos^2(xy)}}=2.$$

Odavde slijedi,

$$\log_2\left[2\cos^2(xy)+\frac{1}{2\cos^2(xy)}\right]-1$$
$$\geq \log_2 2-1=0.$$

S druge strane je $-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le 0$. Dakle, da bi vrijedila jednakost, mora biti $y=\frac{1}{2}$ i

$$2\cos^2(xy) = \frac{1}{2\cos^2(xy)},$$

pa slijedi,

$$2\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Odavde dobivamo $\cos^4\frac{x}{2} = \frac{1}{4} \implies \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \implies \frac{1+\cos x}{2} = \frac{1}{2}$, tj. $\cos x = 0$ i $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Dakle. $(x,y) \in \left\{\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}, \frac{1}{2}\right) : k \in \mathbf{Z}\right\}$."

Zaista domišljato i logično, ali trebalo je sjetiti se. Evo kako taj zadatak analizom rješavaju "obični smrtnici":

Prvo, $2\cos^2(xy) \neq 0 \implies \cos(xy) \neq 0 \implies xy \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Zatim je $-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le 0$, $\forall y \in \mathbf{R}$, pa slijedi redom:

$$\log_2\left[2\cos^2(xy) + \frac{1}{2\cos^2(xy)}\right] - 1 \le 0,$$

$$\log_2\left[2\cos^2(xy) + \frac{1}{2\cos^2(xy)}\right] - \log_2 2 \le 0,$$

$$\log_2\left[\cos^2(xy) + \frac{1}{4\cos^2(xy)}\right] \le 0,$$

$$\implies 0 < \cos^2(xy) + \frac{1}{4\cos^2(xy)} \le 1.$$

Iz $\cos(xy) \neq 0$ i $\cos^2(xy) \in [0,1]$ slijedi

$$\cos^2(xy) + \frac{1}{4\cos^2(xy)} > 0.$$

Sada rješavamo nejednadžbu

$$\cos^2(xy) + \frac{1}{4\cos^2(xy)} \le 1,$$

$$\cos^2(xy) + \frac{1}{4\cos^2(xy)} - 1 \le 0,$$

$$4\cos^4(xy) - 4\cos^2(xy) + 1 \le 0,$$

$$(2\cos^2(xy) - 1)^2 \le 0,$$

a to je moguće samo ako je $2\cos^2(xy) - 1 = 0$.

Dalje je

$$\cos^2(xy) = \frac{1}{2},$$

$$\cos(xy) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

te je $xy = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

No tada je lijeva strana zadane jednakosti jednaka nuli:

$$\log_2\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right) + \frac{1}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}+k\pi)}\right] - 1$$
$$= \log_2 2 - 1 = 0,$$

pa i desna strana mora biti jednaka nuli:

$$-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \implies y = \frac{1}{2}.$$

Konačno rješenje sustava je

$$xy = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$$
$$y = \frac{1}{2},$$

a to su parovi

$$(x,y) \in \left\{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{1}{2}\right) : k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Zaista lijepa analiza za rad s učenicima.

* * *

I na kraju, umjesto zaključka, citirat ću našeg uglednog matematičara Vladimira Devidéa:

"Na velike se vrhunce,
ponekad
može uspeti
s različitih padina planine,
no,
one koji stignu na vrh,
obasjava isto sunce."

JOŠ JEDAN ZADATAK

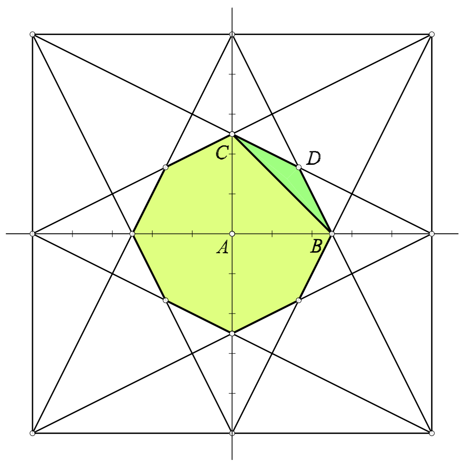
Evo prošlo je i *Županijsko natjecanje u matematici*. Zadaci su bili poprilično teški. Sanja Kolar, učenica I. razreda koji sam pripremala za natjecanje osvojila je prvo mjesto, nažalost sa samo 29 (od 100 mogućih) bodova. No naše su pripreme ipak urodile malim plodom. Sanja je riješila jedan zadatak i to drukčije od "službenog rješenja". Rješenje, koordinatnom metodom, učinilo mi se jako zgodnim i učenicima je prihvatljivije (posebno ako ga usporedimo sa "službenim"). Napominjem samo da sam Sanjino rješenje malo promjenila. Ona je vrh kvadrata smjestila u ishodište.

Zadadatak Unutar kvadrata stranica duljine 1 nacrtani su svi jednakokračni trokuti kojima je baza stranica kvadrata, a vrh polovište nasuprotne stranice. Odredite površinu osmerokuta koji je presjek ta četiri trokuta.

Rješenje. Koordinatna metoda: dani kvadrat smjestimo u koordinatni sustav tako da je sjecište dijagonala kvadrata u ishodištu.

Vrhovi kvadrata se tada nalaze u točkama $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Stranice kvadrata leže na pravcima $x = \pm\frac{1}{2}$ i $y = \pm\frac{1}{2}$.



Očito je tražena površina $P = 4 \cdot P(ABDC)$, $P(ABDC) = P(ABC) + P(BDC)$.

Pošto je $A(0, 0)$, $B\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $C\left(0, \frac{1}{4}\right)$ slijedi $d(A, B) = d(A, C) = \frac{1}{4}$.

Trokut je pravokutan pa je $P(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$.

Točka D je presjek pravaca $y = -2x + \frac{1}{2}$ i $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ pa se lako izračuna da je $D\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

Po formuli $P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ za površinu trokuta zadanog koordinatama vrhova $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$ i $T_3(x_3, y_3)$ izračuna se da je $P(BDC) = \frac{1}{96}$.

Tada je $P(ABDC) = \frac{1}{32} + \frac{1}{96} = \frac{1}{24}$ pa je $P = 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{6}$.

Željka Bjelanović, Čazma

GODIŠNJA SKUPŠTINA DRUŠTVA MATEMATIČARA I FIZIČARA U RIJECI

Rad Društva u protekle dvije godine prikazan je u Almanahu što ga je Predsjedništvo Društva (predsjednica dr. sc. Nada Orlić, tajnik dr. sc. Dean Crnković i blagajnica Katarina Volarić, prof.) predstavilo na izbornoj Skupštini Društva održanoj 31. siječnja 2002. godine.

Istaknimo samo neke aktivnosti Društva u proteklom razdoblju.

Članovi Društva pripremili su, a Hrvatski radio — Radio Rijeka emitirao je tijekom 2000. godine u najslušanijim terminima 16 znanstveno-popularnih radijskih minijatura pod nazivom “Baltazar”. U tim se emisijama govorom o zanimljivim pojavama, osobama ili događajima vezanim uz područja matematike odnosno fizike nastojalo popularizirati obje znanosti.

Društvu matematičara i fizičara Rijeke povodom 35. obljetnice djelovanja dodijeljena je 1986. godine Nagrada Grada Rijeke, a na prijedlog Rektorata Sveučilišta u Rijeci kojeg su predložile i članice Rektorata Društvu je za kontinuirano sudjelovanje u oblikovanju nastavnika i znanstvenika iz područja matematike i područja fizike dodijeljena u 2001. godini Zlatna plaketa “Grb Grada Rijeke”.

I u prethodnom dvogodišnjem razdoblju nastavljena su, započeta 1995. godine, javna godišnja natjecanja iz matematike za srednjoškolce i studente koja se mogu naći na web stranicama Društva (`http://www.pefri.hr/dmf`).

Osnovnu djelatnost Društva i dalje je činilo redovito održavanje kolokvija pa prema Almanahu navodimo predavanja koja su održana u protekle dvije godine.

- 27. 01. 2000. Redovita godišnja skupština društva (izborna) s predstavljanjem almanaha DMF 1998/1999;
- 09. 03. 2000. *Konceptualno razumijevanje u nastavi fizike*, Mr. sc. Branka Milotić, Filozofski fakultet u Rijeci;
- 23. 03. 2000. *O nekim novim troravninama*, Dr. sc. Sanja Rukavina, Filozofski fakultet u Rijeci;
- 06. 04. 2000. *Primjena izotopnih metoda u istraživanju dinarskog krša*, Dr. sc. Nada Horvatinčić, Institut “Ruđer Bošković”, Zagreb;
- 20. 04. 2000. *Teoremi Korovkina*, Prof. dr. sc. Tibor Pogány, Odjel za pomorstvo, Rijeka;
- 04. 05. 2000. *Antiatom – simetrije u prirodi*, Dr. sc. Zoran Kaliman, Filozofski fakultet u Rijeci;
- 18. 05. 2000. *Blanušin graf*, Prof. dr. sc. Ivan Ivanšić, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb;
- 01. 06. 2000. *Spontana emisija - klasični i kvantni pristup*, Prof. dr. sc. Zdravko Lenac, Filozofski fakultet u Rijeci;
- 19. 10. 2000. *Coulombska eksplozija molekula kisika*, Nenad Ocelić, prof., Rijeka;
- 09. 11. 2000. *Misterij neeuklidske geometrije*, Mr. sc. Josip Reš, Rijeka;
- 23. 11. 2000. *Fizičari eksperimentatori - primjer rada s darovitim učenicima*, Marina Gojković, prof., Gimnazija “Matija Mesić”, Slavonski Brod;
- 18. 01. 2001. *Vremenske promjene fizičkih parametara simbiotske zvijezde CH Cygni*, Dr. sc. Rajka Jurdana–Šepić, Filozofski fakultet u Rijeci;
- 01. 02. 2001. Redovita godišnja skupština Društva;
- 08. 03. 2001. *Ponašanje Weierstrassove σ–funkcije i neke posljedice*, Prof. dr. sc. Tibor Pogány, Odjel za pomorstvo, Rijeka;
- 22. 03. 2001. *Primjena matematike u modelirarnju psihologijskih i biologijskih procesa*, Dr. sc. Dražen Domijan, Filozofski fakultet u Rijeci;
- 12. 04. 2001. *Why aeroplanes really fly*?, Prof. dr. Hans O. Lutz, Sveučilište u Bielefeldu, Njemačka;
- 26. 04. 2001. *Numerička linearna algebra u aritmetici konačne preciznosti*, Doc. dr. sc. Zlatko Drmač, Matematički odjel PMF-a, Zagreb;
- 10. 05. 2001. *Osnovne ideje teorije supravodljivosti*, Velimir Labinac, prof., Filozofski fakultet u Rijeci;
- 24. 05. 2001. *On long runs of head and tails*, Prof. dr. Tamás F. Móri, Department of Probability & Statistics, Rolando Eötvös University, Budapest;
- 25. 10. 2001. *Neke primjene matematike*, Doc. dr. sc. Aleksandar Zatezalo, Filozofski fakultet u Rijeci;
- 08. 11. 2001. *Veliki projekt razvoja života i naša slobodna volja*, Mr. sc. Smiljan Visković, Pomorski meteorološki ured državnog hidrometeorološkog zavoda Rijeka;
- 22. 11. 2001. *O jednoj generalizaciji Kolmogorovljevog jakog zakona velikih brojeva*, Prof. dr. sc. Nikola Sarapa, Matematički odjel PMF-a, Zagreb;
- 13. 12. 2001. *Orijentacijski efekti pri ionizaciji molekula brzim ionima*, Dr. sc. Zoran Kaliman, Filozofski fakultet u Rijeci.

Realizaciju navedenih djelatnosti bilo je moguće provesti, jer smo imali novčanu i druge podrške od Poglavarstva Grada Rijeke, Upravnog odjela za društvene djelatnosti Primorsko-Goranske županije i Filozofskog fakulteta u Rijeci, na čemu im zahvaljujemo.

Na Skupštini izabrano je Predsjedništvo Društva za sljedeće dvije godine: predsjednik prof. dr. sc. Tibor Pogány, tajnik mr. sc. Ivoslav Ban, blagajnik Mariza Sarta Deković, prof.

Jasenka Đurović, Rijeka