

GeoGebra (2)

Prvi softver dinamične geometrije na hrvatskom jeziku

Šime Šuljić, Pazin



U prethodnom broju **MŠ**-a opisali smo odlike besplatnog programa **GeoGebra** i uputili vas kako da preuzmete i instalirate program. Detaljnije smo se pozabavili njegovom alatnom trakom. Nekoliko elementarnih primjera trebalo je biti dovoljno da vas ohrabri za brz napredak u malom, ali snažnom i matematičarima vrlo bliskom programu. Mnogi su mi čitatelji javili da su oduševljeni programom. Vjerujem da će sada neki od njih samo letimično pregledati ovaj drugi dio opisa programa jer su mnoge mogućnosti već sami otkrili.

U međuvremenu je autor Markus Hohenwarter sa salzburškog sveučilišta nadgradio program na inačicu 2.5, koja je sada prevedena na jedanaest svjetskih jezika. Vjerujem da će nove mogućnosti još više oduševiti korisnike. Osim poboljšanog izgleda najznačajnije novine su:

- jednostavno umetanje takozvanih klizača za brojeve i kutove u geometrijski prozor. Klizač je grafička predodžba broja ili kuta;
- umetanje slike u konstrukciju;
- konstrukcije polukružnica, lukova i kružnih

isječaka;

- geometrijske transformacije (osnu i centralnu simetriju, translaciju, rotaciju i homotetiju) moguće je sada primijeniti izravno na poligone i slike;
- moguć je ispis ili prijenos crteža u stvarnoj veličini ili u željenom mjerilu;
- crta krivulju lokusa;
- bolje sjecište dužina, zraka i lukova;
- moguće je uređivati koordinatne osi i crtaču plohu (**Odrednice > Crtača ploha**).

Nove mogućnosti nas ponovno vraćaju opisu alatne trake, jer su se na njoj odrazile najveće promjene. Na raspolaganju je devet skupina alati ljepšeg izgleda. I ona mala strelica za otvaranje skupine je ukomponirana u svako dugme. Klikom na desni donji ugao ikone otvara se skupina alata. Dugmad alatne trake nazivamo u programu i *načinom* (rada). Popis novih *načina* je pozamašan, pa je najbolje da ga opet prikazemo tablično.

PREGLED NOVIH ALATA:

Način	Naziv	Opis
	Vrtnja oko točke	Objekt se pomoću miša može vrtjeti u krug. Klikom na točku određeno je središte vrtnje, a zatim se <i>uzme</i> objekt i vrti ga se oko središta.
	Polovište ili središte	Klikom na dvije točke ili dužinu dobije se polovište.



Način	Naziv	Opis
	Dužina zadane duljine iz točke	Klikom na točku određuje se prva rubna točka dužine i otvara dijaloško polje u koje se zadaje dužina dužine. Dobiva se druga rubna točka, koja se može vrtjeti dugmetom Pomicanje oko početne točke A.
	Vektor iz točke	Ovaj alat koristi se kada je potrebno nacrtati vektor jednak već nekom postojećem vektoru iz određene točke. Najprije odaberemo točku, a potom vektor.
	Polara ili konjugirani promjer	Ovaj način daje polaru, odnosno konjugirani promjer konike. Odabir točke i konike daje polaru, a odabir pravca ili vektora i konike daje pravac nositelj konjugiranog promjera.
	Kružnica sa središtem i polumjerom	Odabere se središte kružnice, a u dijaloško polje unosi dužina polumjera.
	Polukružnica	Odabir točaka A i B daje polukružnicu nad dužinom AB.
	Kružni luk određen središtem i dvjema točkama	Odabir triju točaka M, A i B daje kružni luk sa središtem M, početnom točkom A i krajnjom točkom B. Napomena: točka B ne mora ležati na luku.
	Luk opisan trima točkama	Odabirom triju točaka dobiva se kružni luk kroz te tri točke.
	Kružni isječak određen središtem i dvjema točkama	Odabir triju točaka M, A i B daje kružni isječak sa središtem M, početnom točkom A i krajnjom točkom B. Napomena: točka B ne mora ležati na isječku.
	Isječak opisanog luka trima točkama	Odabirom triju točaka dobiva se kružni isječak koji pripada kružnom luku kroz te tri točke.
	Kut	Ovaj način daje kut između: triju točaka, dviju dužina, dvaju pravaca, dvaju vektora ili sve unutarnje kutove mnogokuta. Klikne se na odabrane objekte. Svi ovako dobiveni kutovi nalaze se u intervalu od 0 do 180°. Za nadopunu do punog kuta potrebno je uključiti tu mogućnost u dijaloškom prozoru Svojstva .
	Kut zadane veličine	Nakon odabira dviju točaka otvara se dijaloško polje u koje se upisuje veličina kuta.
	Udaljenost	Klikom na objekte može se izmjeriti udaljenost između dviju točaka, dvaju pravaca ili točke i pravca.
	Klizač	Potrebno je kliknuti na slobodnu površinu na crtaćoj plohi. Pritom se otvara dijaloški prozor u kojem se određuju granice broja, odnosno kuta i širina klizača. Oblikovanje i položaj klizača određuje se u dijaloškom prozoru Svojstva .
	Lokus	Odabere se točka Q čiji se lokus želi dobiti, a potom se klikne na točku P od koje je zavisna točka Q. Napomena: točka P je točka na nekom objektu (pravac, dužina, kružnica, ...).
	Zrcaljenje objekta preko točke	Centralna simetrija. Odabere se objekt za zrcaljenje, a potom klikne na točku preko koje će se zrcaliti (središte simetrije).
	Zrcaljenje objekta preko pravca	Oсна simetrija. Odabere se objekt za zrcaljenje, a potom klikne na pravac (os simetrije) preko kojeg se zrcali.

Način	Naziv	Opis
	Translacija objekta za vektor	Odabere se objekt i klikne na vektor.
	Rotacija objekta oko točke	Odabere se objekt koji treba rotirati, a potom klikne na točku koja će biti središte rotacije. U otvoreno dijaloško polje upisuje se kut rotacije.
	Rastezanje objekta iz točke	Homotetija. Odabere se objekt, a zatim klikne na točku koja će biti središte rastezanja. Otvara se dijaloško polje u koje se upisuje faktor rastezanja.
	Umetanje slike	Ovaj način omogućuje umetanje slika u konstrukciju. Klikom na crtaču plohu određuje se položaj lijevog donjeg ugla slike. Klikom na točku određuje se točka na koju se vezuje lijevi donji ugao slike. Nakon toga se otvara dijaloški prozor za otvaranje datoteke.
	Povećanje	Klikom bilo gdje na crtaču plohu ona se povećava.
	Smanjenje	Klikom bilo gdje na crtaču plohu ona se smanjuje.
	Pokaži / sakrij objekt	Klikne se na objekt da bismo ga pokazali, odnosno sakrili. Svi objekti odabrani za skrivanje bit će istaknuti. Promjena nastupa kada kliknete na bilo koje dugme u alatnoj traci.
	Pokaži / sakrij oznaku	Klikne se na objekt da bismo pokazali, odnosno sakrili njegovu oznaku.
	Prenositelj oblikovanja	Ovim načinom prenose se svojstva objekta kao što su boja, veličina, vrsta crte itd. s jednog objekta na nekoliko drugih. Najprije se klikne na objekt čija se svojstva prenose, a potom na objekte kojima se žele pridijeliti ta svojstva.
	Brisanje objekta	Klikne se na objekt koji se želi izbrisati.

PRIMJERI

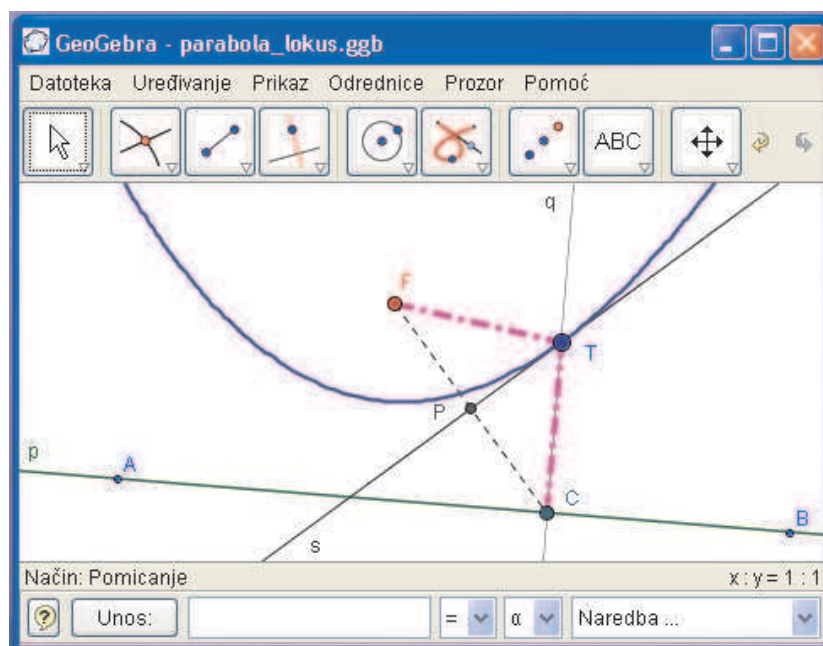
S većinom opisanih *načina* brzo ćete se snaći najjednostavnijom metodom učenja, metodom pokušaja i pogreške u vašim konstrukcijama. Po potrebi u izborniku **Pomoć** kliknite na **Indeks** i potražite odgovarajući pojam. U nekoliko sljedećih primjera upotrijebit ćemo samo neke alate.

Parabola kao geometrijsko mjesto točaka

Dobivanje krivulje lokusa u programima dinamične geometrije jedan je od jačih aduta tih programa. Konstruirajmo parabolu kao geometrijsko

mjesto točaka ravnine jednako udaljenih od pravca p i čvrste točke ravnine F .

1. Alatom **Pravac kroz dvije točke** nacrtajmo pravac p .
2. Alatom **Nova točka** nacrtajmo točku C na pravcu p i točku F izvan pravca p .
3. Spojimo točke F i C alatom **Dužina između dviju točaka**.
4. Kliknimo na dužinu FC alatom **Polovište ili središte** da dobijemo polovište P .
5. Uzmimo alat **Okomica**, pa kliknimo na polovište P i dužinu FC , da dobijemo simetralu dužine s .
6. Istim alatom konstruirajmo okomicu q na pravcu p u točki C .
7. Odaberimo alat **Sjecište dvaju objekata** i kliknimo na pravce s i q , da bismo dobili nji-

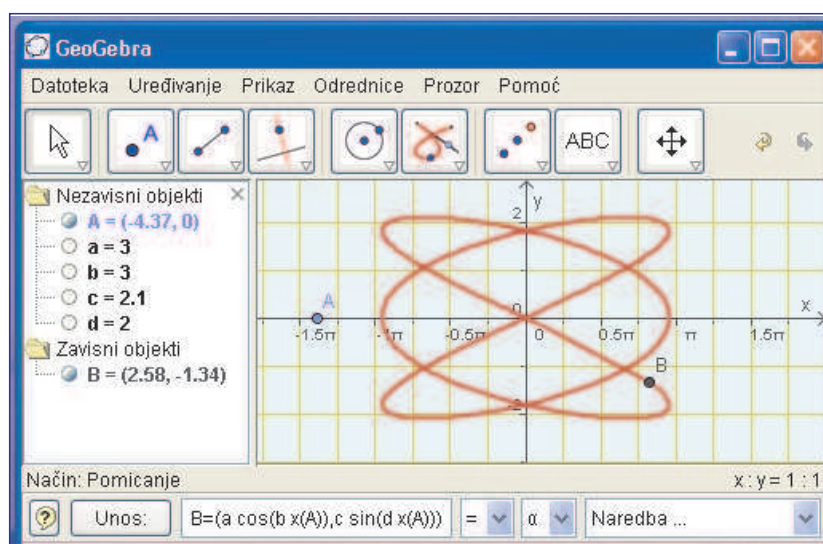


hovo sjecište T . Točka T kao točka simetrale dužine jednako je udaljena od njezinih rubnih točaka, a kako se točka T nalazi i na okomici na pravac p , znači da je jednako udaljena i od pravca p i od točke F .

8. Alatom **Lokus** najprije treba kliknuti na točku T , a potom na točku C , da bismo dobili parabolu.

Lissajouva krivulja

Dvije zavisne točke pomoću kojih konstruiramo krivulju lokusa ne moraju biti nužno vezane geometrijskom konstrukcijom. One mogu biti vezane i algebarski. Neka tako točka A pripada osi x . Točku B definirajmo pomoću aps-



cise točke A izravnim upisom u *Polje za unos*: $B = (a \cos(b \times(A)), c \sin(d \times(A)))$. Između koeficijenta i funkcije, koeficijenta i varijable ili dvaju koeficijenata potrebno je ostaviti prazno mjesto ili znak $*$ za množenje.

Alatom **Lokus** najprije kliknemo na zavisnu točku B , a potom na točku A . Time smo dobili parametarski zadanu krivulju iako program nema mogućnost izravnog crtanja krivulja zadanih parametarski. Naravno da je sama krivulja dinamična jer se parametri a, b, c i d mogu mijenjati tipkama $+$ i $-$ ili strelicama na tipkovnici.

Eksplisitni oblik jednadžbe pravca

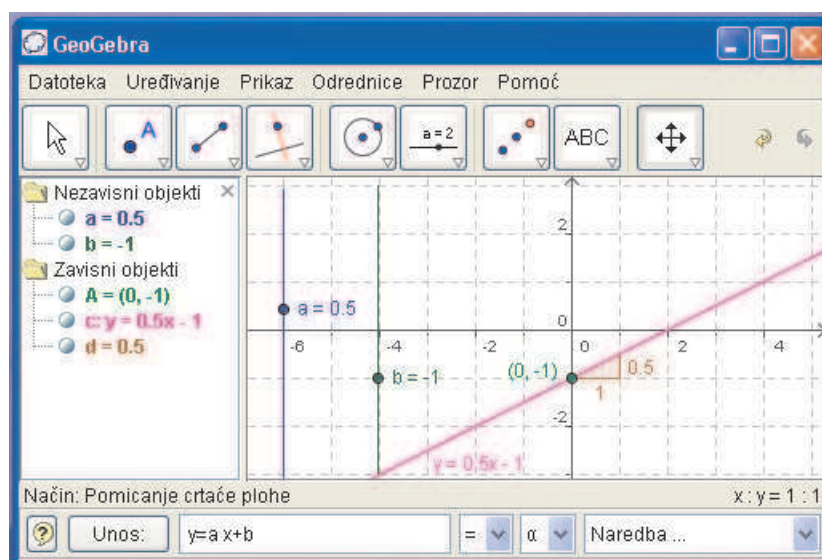
Vratimo se nečim jednostavnijem da ne ispadne da je to sve jako zgodno, ali nema primjene na redovnom satu matematike. Napravimo dinamični crtež u kojem ćemo istražiti utjecaj koeficijenata na izgled grafa linearne funkcije. Za predodžbu utjecaja koeficijenata na grafove funkcija od velike nam pomoći mogu biti tzv. klizači. Klizači su zapravo grafička predodžba broja ili kuta. Riječ je o dužini s točkom na sebi. Kako pomičemo točku, mijenja se i pridružena joj vrijednost. Uzmemo alat **Klizač** i kliknemo na crtaću plohu. Otvara se dijaloški okvir u koji se unose granice interva-

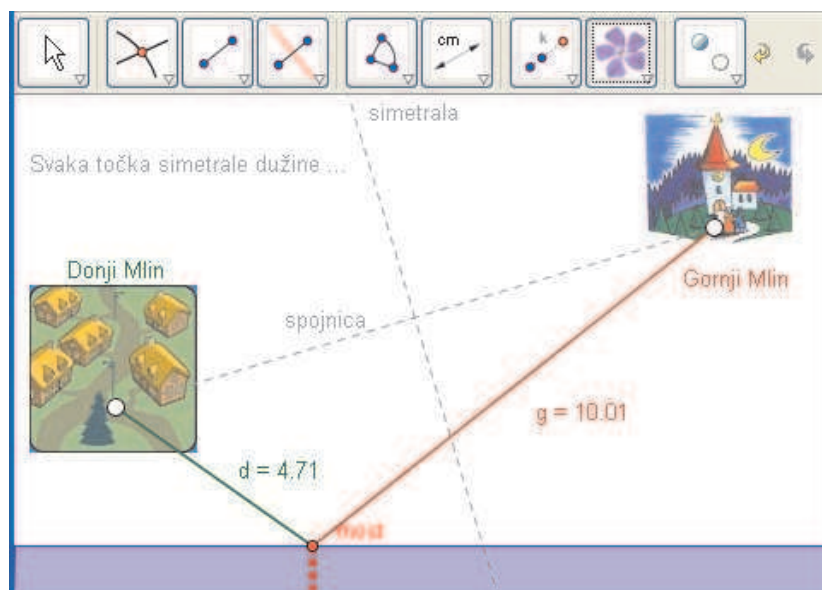
la za broj ili kut, odabire hoće li biti vertikalni ili horizontalni, određuje njegova širina i korak promjene. Klizač se može dodatno oblikovati u izborniku **Svojstva**.

Ako smo klizače prethodno definirali, onda za crtanje pravca pomoću eksplicitno zadane jednadžbe upišimo u *Polje za unos* jednadžbu $y = a \cdot x + b$ <Enter>. Sada pravac prati sve promjene vrijednosti koeficijenata koje daju klizači. Da bismo uočili značenje koeficijenta b na grafu, u *Polje za unos* upišimo $(0, b)$ <Enter>, tj. nacrtajmo točku u kojoj pravac siječe os y . Desnom tipkom miša kliknemo na tu točku da bismo u skočnom izborniku izabrali **Svojstva** pa umjesto točke izaberimo vrijednost. Da bismo dobili pravokutan trokut horizontalne katete 1 ispod pravca, upišimo u *Polje za unos* **Nagib**[c], gdje je c naziv pravca.

Umetanje slike

Što uopće s umetnutom slikom, crtežom ili fotografijom u dinamičnom okružju? Pa može se svašta. Evo samo nekoliko ideja. Geometrijske transformacije možemo raditi s točkama, dužinama, pravcima, konikama i mnogokutima, a sada možemo i svoju fotografiju ili koju drugu sličicu rastegnuti za faktor k u homotetičnom preslikava-



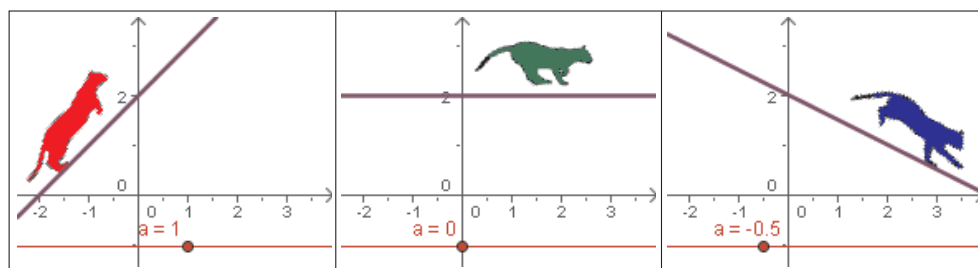


nju iz neke točke. Kad smo već kod fotografije, možemo istražiti jesmo li građeni po zlatnom rezu. A možemo umetnuti zemljopisnu kartu Hrvatske pa istraživati udaljenosti ili pokušati odrediti površine pojedinih krajeva. Ili umetnemo li fotografiju nekog mosta, može se ispitati odgovara li njegov luk luku neke parabole.

Primjer 1. Za ilustraciju mogućnosti ume-tanja slike posegnimo za nečim puno jednostavnijim. Prisjetimo se zadatka iz prethodnog broja **MŠ**-a o potrebi izgradnje mosta preko rijeke koji bi trebao opsluživati dva sela i biti od njih jednako udaljen. Uz točke koje predstavljaju sela ubacimo dvije različite sličice sela i naš je zadatak postao motivacijski jači, jer je dobio na živopisnosti. U izborniku **Svojstva** može se podesiti da slika bu-

de u pozadini tj. iza koordinatnih osi. Takva se slika ne može micati u načinu **Pomicanje**. Transparentnost slike može se podesiti na skali **Ispune** u izborniku **Svojstva**.

Primjer 2. Nagib grafa funkcije jako je važan matematički pojam i kada za to dođe vrijeme, u nastavi matematike uvodi se stroga definicija. Na nižoj razini obrazovanja često posegnemo za zgodnom ilustracijom da bi ga učenici intuitivno shvatili. Po raznim matematičkim ilustracijama na grafovima linearnih funkcija nađu se primjerice penjači ili skijaši, već ovisno o tome je li funkcija rastuća ili padajuća. Na statičnim crtežima to i nije neki problem napraviti. Ali kako to riješiti u **Geo-Gebri** da se promijeni i sličica kada se promijeni predznak nagiba pravca? Ono što vidite u donjem



strip-crtežu nisu tri različita crteža, nego je riječ o jednom dinamičnom crtežu u kojem se mijenja samo nagib pravca.

Kako u **GeoGebri** ne postoji uvjetna naredba, problem promjena sličica može se postići drugim matematičkim funkcijama. Najprije se konstruira klizač a i b , a potom u *Polju za unos* zada funkcija $f(x) = ax + b$. Slika se lijevim donjim kutom može vezati za bilo koju točku. Recimo da želimo konstruirati točku na grafu funkcije s apscisom $x_1 = -2$, ali koja će nestati kada nagib a ne bude pozitivan. Upišimo u polje za unos $x_1 = -2 * \log(\operatorname{sgn}(a) * 2.718)$. Ovdje je $\operatorname{sgn}(a)$ funkcija predznaka, funkcija $\log$ je u **GeoGebri** prirodni logaritam, stoga je za argument uzeta približna vrijednost broja e , da vrijednost logaritma bude jedan kada je nagib pozitivan, tj. logaritam definiran. Nacrtajmo točku izravnim upisom $A = (x_1, f(x_1))$ u *Polje za unos*. Slično tome, da bismo dobili točku na grafu funkcije kada je nagib negativan, definirajmo apscisu točke $x_2 = 1 * \log(\operatorname{sgn}(-a) * 2.72)$ i točku $B = (x_2, f(x_2))$. Mijenjajmo koeficijent smjera a i ako je sve u redu, točke bi trebale naizmjenično nestajati i pojavljivati se. Pronađimo na Internetu neku zgodnu sličicu za rast, odnosno pad funkcije i spremimo je na lokalni disk. Odaberimo u alatnoj traci način **Umetanje slike** i kliknimo na jednu od konstruiranih točaka. Otvara se dijaloški prozor za otvaranje datoteke i izaberemo odgovarajuću sličicu. Sličica se lijevim donjim kutom prilijepi za točku. Isto napravimo za drugu točku. No, ove nam sličice ne leže na pravcu, već ga samo jednim kutom dodiruju. Želimo li da sličica donjom stranom prati nagib pravca, potrebno je definirati i drugu točku grafa koju ćemo pridružiti donjem desnom uglu sličice. Da ne dođe do stezanja ili rastezanja sličice, definirajmo tu točku za prvu sličicu ovako: $A' = (-2 + \tilde{s} * \cos(\operatorname{atan}(a)), f(-2 + \tilde{s} * \cos(\operatorname{atan}(a))))$, gdje je $\tilde{s}$ širina slike u centimetrima, a $\operatorname{atan}(a)$ arkus kosinus broja a , tj. kut što ga pravac zatvara s pozitivnim dijelom osi apscisa. Sada desnom tipkom miša kliknimo na sliku, pa u izborniku **Svojestva** za drugi kut slike izaberimo točku A' . Kada klizačem mijenjamo vrijednost koeficijenta a , prolazimo i kroz vrijednost 0. Naravno da to više nije linearna funkcija, već konstanta koja nema nagiba.

U tom slučaju bilo bi dobro da se pojavi neka točka kojoj ćemo priključiti sličicu koja će simbolizirati stanje ni rasta, ni pada. Jednostavno definirajmo točku ovako: $(100 * \operatorname{sgn}(a), f(100 * \operatorname{sgn}(a)))$. Ova točka je uvijek definirana neovisno o nagibu, ali je ovdje brojka 100 stoga da točku *izbacuje* iz vidljivog dijela koordinatnog sustava na ekranu u slučaju kada je nagib različit od nule.

Prijenos crteža u Word dokument

GeoGebra producira crtež visoke kvalitete. Često će se pokazati potreba za umetanjem tog crteža u neki drugi računalni program kao što su *Word*, *Latex*, *FrontPage*, ... U jednom od sljedećih nastavaka tome ćemo posvetiti više prostora, a sada se zadržimo samo na onom što većini nastavnika često treba; umetnuti crtež u *Wordov* dokument. To čak ne mora biti neka konstrukcija, već samo slika koordinatnog sustava s koordinatnom mrežom. Zašto takvo što ne umetnuti u pismeni ispit? U svakom slučaju, suzimo i proširimo geometrijski prozor programa da se vidi baš ono što želimo vidjeti u odgovarajućem položaju i veličini. Možemo koristiti i način **Pomicanje crtaće plohe**. Crtaća se ploha može pomicati pomoću miša i bez posebnog načina ako držimo istovremeno pritisnutu tipku <Ctrl> dok smo u bilo kojem načinu. Prije prijenosa crtaće plohe može se još podesiti boja pozadine, urediti koordinatne osi i mreža u izborniku **Odrednice > Crtaća ploha**. Kada smo zadovoljni izgledom geometrijskog prozora, a istovremeno imamo otvoren *Word*, najjednostavniji način da prenesemo sliku je kroz izbornike **Datoteka > Prijenos > Crtaća ploha u međuspremnik**. Potom alatom **Zalijepi** umetnemo crtež u dokument na željeno mjesto.

Ali crtež za prijenos možete i spremati u PNG ili EPS formatu. Za rad u *Wordu* prikladan je PNG format. *Portable Network Graphics* je grafički format u pikselima (točkicama). Viša rezolucija (dpi), znači i bolju kvalitetu (300 dpi je obično dovoljna kvaliteta). Smanjivanje ili uvećavanje PNG crteža obično dovodi do smanjenja kvalitete. Postupak spremanja slike je jednostavan. Izbornicima **Datoteka > Prijenos > Crtaća ploha kao crtež ot-**

	Platform	includes Java	without Java	Instructions
	Windows	Download (17.2M)	Download (2.4M)	View
	Mac OS X		Download (3.6M)	View
	Linux	Download (36.7M)	Download (4.5M)	View
	Any Unix Platform		Download (4.5M)	View
	Other Java-enabled Platforms		Download (4.5M)	View

vorimo dijaloški okvir u kojem izaberemo grafički format, mjerilo i rezoluciju, a nakon toga kliknemo na **Prijenos**. Kod promjene mjerila pritisnite tipku <Enter> da biste vidjeli proračun veličine slike. Uvijek kada umetnemo PNG grafičku datoteku u Word dokument (izbornik **Umetanje > Slike > Iz datoteke**) moramo biti sigurni da je veličina postavljena na 100%. Inače će dano mjerilo (u cm) biti izmijenjeno.

Uputa za preuzimanje i instalaciju programa

Prosječno podešeno računalo ne može baš *usrećiti* matematičara. Bez dodatnih instalacija nema ni običnog razlomka ni dobrog matematičkog crteža, a kamoli *pametnog* koordinatnog sustava kakvim raspolaže **GeoGebra**. Zbog toga je često potrebno podešavanje već instaliranih programa ili instalacija novih od kojih su mnogi putem Interneta besplatno dostupni svakom. Na raznim informatičkim tečajevima zaboravlja se poučiti tome kako se preuzima i instalira program. Da se to i nama ne dogodi, odnosno da računalni početnici među nama ne moraju potezati nekog od kolega ili ukućana za rukav, dozvolite da još jednom damo uputu za preuzimanje i instalaciju programa.

Potrebno se, dakle, spojiti na Internet i otvoriti adresu www.geogebra.at. Kliknite na link *Preuzimanje* u lijevom stupcu, a potom na otvorenoj stranici na *Preuzimanje GeoGebre*. Otvorit će se stranica u novom prozoru na kojoj se nalazi gore prikazana tablica.

Većina korisnika radi na *Windows* operativnom sustavu, što znači da u tom retku moraju

kliknuti na link [Download \(2.4M\)](#) za preuzimanje programa. Ali preuzeti program će raditi samo ako je na računalu već instalirana *Sun Java*. Ako nije, potrebno je preuzeti program s *Java* klikom na link [Download \(17.2M\)](#). Ukoliko imate dobru internetsku vezu, svakako se odlučite na preuzimanje programa s *Javom* pa ćete ujedno nadograditi već instaliranu inačicu *Jave* i riješiti dilemu imate li ili nemate instaliranu *Javu*. Program spremite u neku mapu na lokalnom disku. Dvostruki klik na preuzetu datoteku *geogebra_setup.exe* pokreće postupak instalacije koji vas samo traži da potvrdite uvjete korištenja i trenutnog pokretanja programa.

Najave

Na *web*-stranicama **GeoGebre** nalazi se link *Najave*. Riječ je o najavi novih poboljšanja programa koje će biti ugrađene u sljedeću inačicu. Očekujemo tako automatsku animaciju, makronaredbe, Boolove operacije, *if-then* naredbu i mnogo toga, kako to često kaže sam autor programa. Na *web*-stranici nalazi se i forum korisnika na kojem možete naučiti mnoge trikove, a i sami se uključiti s pitanjima, željama ili prijavama *bugova*. Ako postoji interes, možemo pokrenuti i forum na hrvatskom jeziku na službenim stranicama.

Najavljujemo i nove članke u **MŠ-u** o **GeoGebri**, jer preostaje još opisati mnoge mogućnosti ovog simpatičnog programa. I vi možete svojim pitanjima i sugestijama utjecati na sadržaj tih članaka.