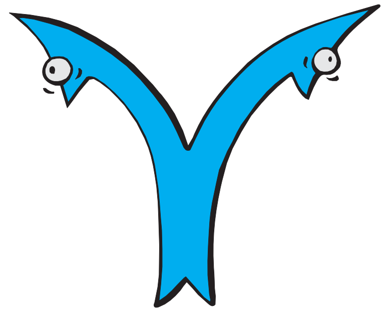


Jedan zadatak — više rješenja

Željka Bjelanović, Čazma

Vrlo je čest slučaj da se neki matematički zadatak može riješiti na dva, tri pa čak i više bitno različitih načina. To ovisi o odabranoj metodi rješavanja, a kod većine učenika način rješavanja zadanog zadatka najčešće je vezan uz nastavno gradivo koje je prethodno obrađeno.

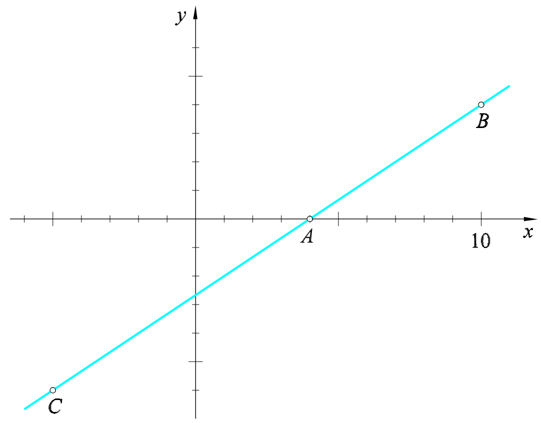
Da bi se nastavno gradivo što lakše usvajalo i što dulje pamtilo, uputno je različite nastavne sadržaje povezivati kad god i koliko god je to moguće. Jedan od načina na koji se to može vrlo lako ostvariti jest zadavanje istog zadatka unutar različitih nastavnih cjelina, odnosno tema.

Za ilustraciju pogledajmo sljedeći primjer preuzet iz analitičke geometrije u ravnini:

Zadatak. Da li točke $A(4, 0)$, $B(10, 4)$ i $C(-5, -6)$ zadane svojim koordinatama u Kartezijevom koordinatnom sustavu pripadaju istom pravcu?

0. rješenje

Nacrtamo zadane točke u koordinatnom sustavu i provjerimo može li se nacrtati pravac kojem bi pripadale sve tri točke.



Ako je takav pravac nemoguće nacrtati, točke ne pripadaju istom pravcu. Što ako uspijemo nacrtati pravac za koji nam se čini da mu pripadaju sve tri točke? Tada još uvijek ne možemo sa sigurnošću tvrditi da sve tri točke uistinu pripadaju nacrtanom pravcu jer se može desiti da je jedna od točaka "vrlo blizu" pravcu, ali ne i na njemu. Onda ovo i nije rješenje. U tom slučaju moramo potražiti neki drugi način rješavanja kako bismo svoje slutnje na osnovi nacrtanog crteža i dokazali.

1. rješenje

Jednadžba pravca zadanog dvjema točkama $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$, gdje je $x_1 \neq x_2$, glasi:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Nakon uvrštavanja koordinata točaka A i B u tu jednadžbu dobijemo jednadžbu pravca AB:

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}.$$

Pripada li točka C pravcu AB? To možemo provjeriti na više načina:

a) Uvrstimo koordinate točke $C(-5, -6)$ u jednadžbu pravca AB:

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = \frac{2}{3} \cdot (-5) - \frac{8}{3} = -6.$$

Zaključujemo da točka C pripada pravcu AB.

b) Možemo izračunati udaljenost točke C od pravca AB po formuli

$$d(T_1, p) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

gdje je $T_1(x_1, y_1) = C(-5, -6)$, a pravac p je pravac AB čija implicitna jednadžba glasi $2x - 3y - 8 = 0$.

$$d(C, p) = \frac{|2 \cdot (-5) - 3 \cdot (-6) - 8|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = 0.$$

Udaljenost točke C od pravca AB jednaka je nuli, što znači da točka C pripada pravcu AB.

c) Odredimo jednadžbu pravca AC pa je usporedimo s jednadžbom pravca AB. Jednadžba prvca AC glasi

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}.$$

Očito, pravci AB i AC jedan su pravac i njemu pripadaju sve tri točke, i točka A, i točka B, i točka C.

2. rješenje

Zadatak možemo riješiti i pomoću udaljenosti točaka u ravnini, koristeći se formulom

$$d(T_1T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

gdje su $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$ dvije dane točke.

Izračunat ćemo udaljenosti $|AB|$, $|BC|$ i $|AC|$ te dobiti sljedeće brojeve:

$$|AB| = 2\sqrt{13},\ |AC| = 3\sqrt{13} \text{ i } |BC| = 5\sqrt{13}.$$

Primjećujemo kako je

$$|AB| + |AC| = |BC|,$$

što znači da točke A, B i C pripadaju istom pravcu (točka A je između B i C).

3. rješenje

Možemo izračunati površinu trokuta ABC:

$$\begin{aligned} P = \frac{1}{2} \cdot |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) \\ + x_C(y_A - y_B) = \frac{1}{2} \cdot |4(4 - (-6)) \\ + 10(-6 - 0) - 5(0 - 4)| = 0. \end{aligned}$$

Površina trokuta jednaka je nuli. Zaključujemo da točke A, B i C i ne određuju trokut, već te točke leže na jednom pravcu.

4. rješenje

Zadatak možemo riješiti i uz pomoć vektora. Vektor zadan početnom točkom $T_1(x_1, y_1)$ i završnom točkom $T_2(x_2, y_2)$ može se na jednoznačan način prikazati kao linearna kombinacija jediničnih vektora $\vec{\imath}$ i $\vec{\jmath}$:

$$\overrightarrow{T_1T_2} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath}.$$

Prikažimo vektor $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ kao linearne kombinacije jediničnih vektora $\vec{\imath}$ i $\vec{\jmath}$:

$$\overrightarrow{AB} = 6\vec{\imath} + 4\vec{\jmath},$$

$$\overrightarrow{AC} = -9\vec{\imath} - 6\vec{\jmath}.$$

Uočavamo da je $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, što znači da su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ kolinearni. A budući da imaju zajedničku početnu točku, slijedi da sve tri točke A, B i C leže na istom pravcu.

5. rješenje

Razmišljajući o analogonu ovog zadataka u prostoru palo mi je na um još jedno pomalo neobično rješenje.

Ubacimo naše točke u prostor na način da im je treća koordinata jednaka 0. Tada ćemo imati točke $A(4,0,0)$, $B(10,4,0)$ i $C(-5,-6,0)$.

Ako te tri točke ne leže na istom pravcu, jednoznačno je određena ravnina u kojoj one leže i to jednadžbom $z=0$ jer smo tako odabrali.

Jednadžba ravnine zadana točkama $T_1(x_1,y_1,z_1)$, $T_2(x_2,y_2,z_2)$ i $T_3(x_3,y_3,z_3)$ je

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Odredimo jednadžbu ravnine kroz točke A, B i C:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-0 & z-0 \\ 10-4 & 4-0 & 0-0 \\ -5-4 & -6-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{vmatrix} x-4 & y & z \\ 6 & 4 & 0 \\ -9 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Razvijemo dobivenu determinantu po trećem stupcu i dobijemo:

$$z[6\cdot(-6)-(-9)\cdot 4]=0$$

$$z\cdot 0=0$$

Zaključak: jednadžba ravnine je neodređena, što znači da su zadane točke kolinearne, odnosno leže na istom pravcu.

* * *

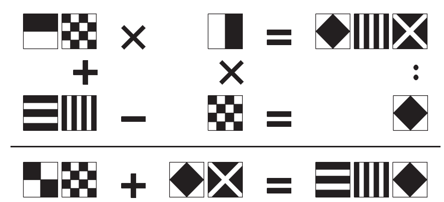
Dobili smo nekoliko bitno različitih rješenja istog zadatka. Vjerujem da to nisu i svi mogući načini rješavanja pa pozivam kolege da se jave ako pronađu još koje. Osim različitih rješenja, možemo postaviti i još koju različitu formulaciju istog zadatka.

Rješavajući ovaj jednostavan zadatak na nekoliko različitih načina, ponovili smo: crtanje točaka i pravaca u koordinatnom sustavu, jednadžbu pravca zadanog dvjema točkama, eksplicitni i implicitni oblik jednadžbe pravca, udaljenost točke do pravca, udaljenost točaka u pravokutnom koordinatnom sustavu, nejednakost trokuta, površinu trokuta zadanog koordinatama vrhova, prikaz vektora u koordinatnom sustavu, linearnu (ne)zavisnost vektora, kolinearnost točaka, a dotakli smo se i geometrije prostora te jednadžbe ravnine.

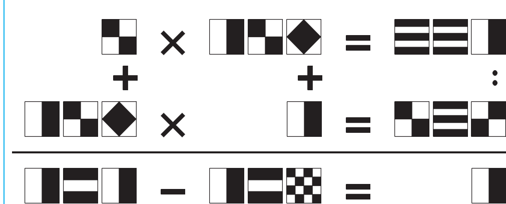
Posebno je zgodno ovakav zadatak iskoristiti prilikom sistematizacije nastavnog gradiva pod kraj nastavne godine i to u trećem razredu srednje škole budući da se tada detaljnije obrađuju i analitička geometrija i vektori. Sigurno će se u jednom razredu pojaviti nekoliko različitih rješenja. Potrebno je izložiti sva učenička rješenja da ostali učenici upoznaju metode rješavanja, način razmišljanja i argumentiranja drugih učenika i na taj način ponove nastavno gradivo.

Zamijenite simbol odgovarajućom znamenkom!

28.



29.



30.