Kleinova boca...

...i kako se u vruće ljetne dane rashladiti hladnim pićem...

Sandra Gračan, Zagreb

Upišete li u tražilicu na Webu pojam *"Klein's-bottle"*, rezultat pretrage bit će stotinjak web stranica. Pogledate li samo neke od njih, bit će dovoljno da vas tema zainteresira.

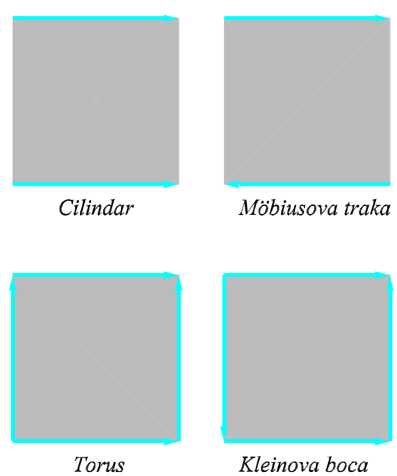
Najkraća definicija glasi ovako:

Kleinova boca neorijentabilna je ploha Eulerove karakteristike nula.

Pročitaju li ovu definiciju topolozi, odmah im je sve jasno. Ploha je potpuno određena ovim dvama podatcima. No, ostalim "smrtnicima" ipak je potrebno još malo opisa. Pročitajte o čemu se zapravo radi!

Korak po korak...

Krenimo opet od najjednostavnije, dvostrane plohe s rubom, kao što je list papira. Već vam je poznato da su broj strana i broj rubova neke plohe dva svojstva po kojima topolozi razvrstavaju plohe. Spoje li se dva nasuprotna brida papira, dobije se cilindar, ploha sa dvije strane i dvama rubovima. Spoje li se dva kružna ruba cilindra, rezultat je torus, dvostrana i zatvorena ploha, bez rubova. Savijete li pak list papira po dijagonali i spojite (npr. selotejpom) susjedne bridove, rezultat će biti zatvorena dvostrana ploha, topološki identična sferi.



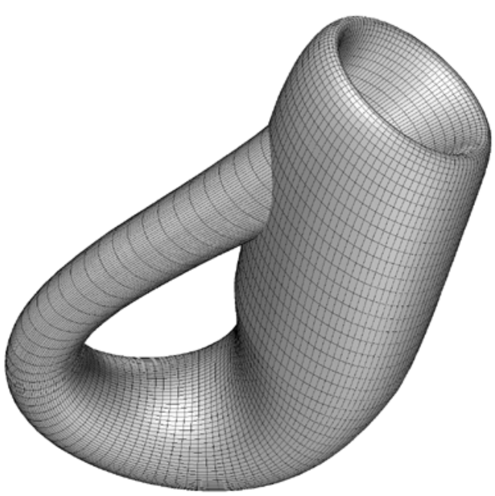
Sl. 1. Kako topolozi crtaju plohe

Stvari postaju zanimljivije spajaju li se rubovi plohe tako da se jednom rubu promijeni orijentacija, tj. ako se taj rub zaokrene (ili izokrene). Rezultat jednog takvog spajanja poznata je Möbiusova traka — zanimljiva, jednostrana, neorijentabilna ploha s jednim rubom – o njezinim svojstvima čitali ste u MŠ-u br. 22 (zar ne?).

Na slici 1. pojednostavnjeni je prikaz nekih ploha. Strelice označuju orijentaciju rubova koji se spajaju: suprotna orijentacija strelica znači da se jedan rub prije spajanja "zaokrene".

Sada već naslućujete kako nastaje Kleinova boca. Spajamo dva ruba cilindra, ali ne tako da dobijemo torus, već tako da jednom rubu prije spajanja promijenimo orijentaciju, zaokrenemo ga. Zvuči jednostavno. Kod Möbiusove trake bilo je lako promijeniti orijentaciju. Sada radimo istu stvar, samo smo se popeli dimenziju više!

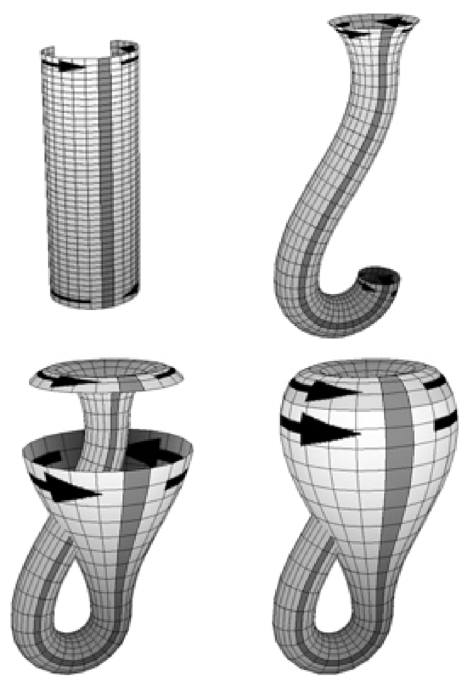
Dakle, želite li načiniti Kleinovu bocu, najprije načinite cilindar. To je trivijalno. Zatim skočite u 4. dimenziju. Kako u 4D postoji i 4. smjer, zaokrenite jednu stranu cilindra u tom smjeru, i onda spojite rubove cilindra. Rezultat je neobična ploha koju je 1882. godine otkrio i opisao njemački matematičar Felix Klein i po kojemu nosi ime.



Sl. 2. Kleinova boca

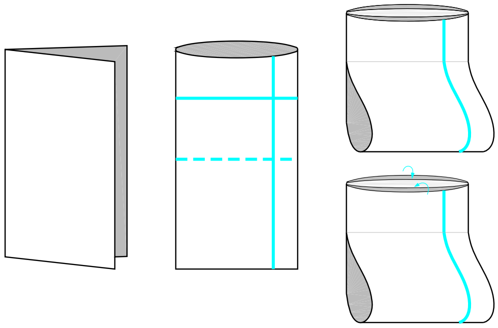
Kreativna radionica

No dobro, skakanje u 4. dimenziju baš nije nešto što svakodnevno i s lakoćom činite. Zato uzmite malo plastelina (tijesta, glinamola, fimo-smjese ili sl.), razvaljajte ga u tanku plohu i načinite cilindar. Zatim na svom cilindru probušite rupu. Kroz tu rupu provucite jedan kraj cilindra, izvrnite ga prema van i spojite rubove. Ipak je to nama, 3D stvorenjima, lakše, zar ne? Slike će vam pomoći.



Sl. 3. Nastajanje Kleinove boce

Model možete načiniti i od papira. Uzmite list papira kvadratnog oblika, presavijte ga napola te spojite rubove na slici označene strelicom — dobili ste cilindar. Na dijelu plohe okrenutom prema vama načinite prorez (na slici označen punom linijom), a zatim model savijte po crtkanoj liniji. Donji kraj cilindra provucite kroz prorez i izvucite ga iznutra prema gore. Na kraju spojite rubove cilindra.



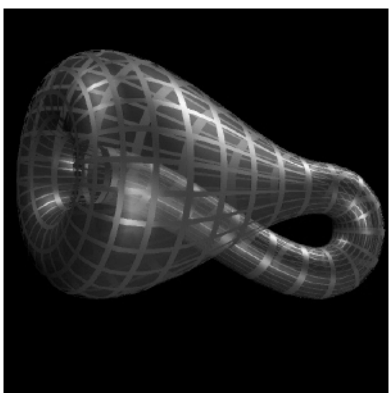
Sl. 4. Papirnati model Kleinove boce

Nije teško uočiti da je taj model, iako pomalo "spljošten", identičan Kleinovoj boci.

Prava ili lažna, pitanje je sad!

Fino, sada kad imamo model, idemo malo razmišljati. I odmah tu nešto ne štima, reći ćete. To što se cilindar od plastelina deformirao proširivši se na jednom kraju, znamo da nije problem, jer imamo na umu da ploha ne mijenja svoja topološka svojstva takvim rastezanjem. Ali bušenje rupe ili rezanje papira nije dozvoljeno! Savijeni, uži dio na našem modelu poput ručke prolazi kroz rupu na širem dijelu plohe. U čemu je problem?

Spajanje dvaju kružnih rubova cilindra nemoguće je izvesti u trodimenzionalnom



Sl. 5. Samopresijecanje plohe

prostoru bez samo-presijecanja plohe. Da bi se rubovi cilindra pravilno spojili, potrebna vam je 4. dimenzija, cilindar mora proći sam kroz sebe!

No, o Kleinovoj boci morate razmišljati kao o glatkoj zatvorenoj plohi, rupe zapravo nema, a ploha siječe samu sebe. Naš trodimenzionalni model od plastelina zapravo je pseudomodel. Malo bolji je papirnati model jer nema rupu. Tu je lakše zamisliti da su se rubovi proreza nakon provlačenja ponovno spojili i da je pred nama sasvim kontinuirana, glatka i zatvorena ploha.

Taj mali nedostatak trodimenzionalne izvedbe Kleinove boce razlog je zbog kojeg kažemo da se Kleinova boca može "uroniti" u 3D prostor, ali nije u njega čvrsto utisnuta. Matematički rečeno, preslikavanje $f : M \to \mathbf{R}^3$, koje svakoj točki Kleinove plohe M pridružuje točku prostora $\mathbf{R}^3$ nije bijekcija, to preslikavanje je bijekcija samo lokalno. Implicitna jednadžba tog preslikavanja u prostor glasi ovako:

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2+2y-1)\\&\quad\cdot\left[(x^2+y^2+z^2-2y-1)^2-8z^2\right]\\&\quad+16xz(x^2+y^2+z^2-2y-1)=0,\end{aligned}$$

a u parametarskom obliku ovako:

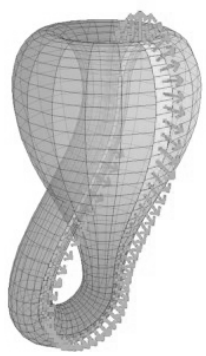
$$\begin{aligned}x&=\cos u\Big[\cos\Big(\frac{1}{2}u\Big)(\sqrt{2}+\cos v)\\&\qquad+\sin\Big(\frac{1}{2}u\Big)\sin v\cos v\Big]\\y&=\sin u\Big[\cos\Big(\frac{1}{2}u\Big)(\sqrt{2}+\cos v)\\&\qquad+\sin\Big(\frac{1}{2}u\Big)\sin v\cos v\Big]\\z&=-\sin\Big(\frac{1}{2}u\Big)(\sqrt{2}+\cos v)\\&\qquad+\cos\Big(\frac{1}{2}u\Big)\sin v\cos v,\end{aligned}$$

$u, v \in [0, 2\pi)$.

E, sad kad smo to riješili, pogledajmo dalje neka od zanimljivih svojstava Kleinove boce.

Jednostranost

Prvo svojstvo Kleinove boce je njezina **jednostranost**.



Sl. 6. Kleinova boca ima jednu stranu

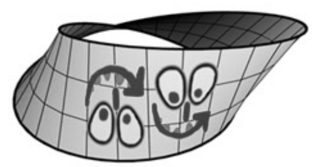
Pomislimo li na trenutak na običnu, začepljenu bocu (hladnog pića u vruće ljetne dane :-)), pred nama je zatvorena ploha koja ima svoju unutrašnjost i vanjštinu. Ploha dijeli prostor u kojem se nalazi na dva dijela i ima volumen. No, Kleinova boca zatvorena je ploha koja ima samo jednu stranu. Njezina unutrašnjost ujedno je i njezina vanjština.

Sl. 7. Kleinova boca s tekućinom

Kao i po Möbiusovoj traci, mrav se hrabro može prošetati kroz Kleinovu bocu, bez straha da će ostati zatočen u njoj. To pak znači da je volumen Kleinove boce nula. U stakleni 3D model možda i uspijete uz malo napora uliti nešto tekućine, jer teško da ćete moći potegnuti pravi gutljaj!

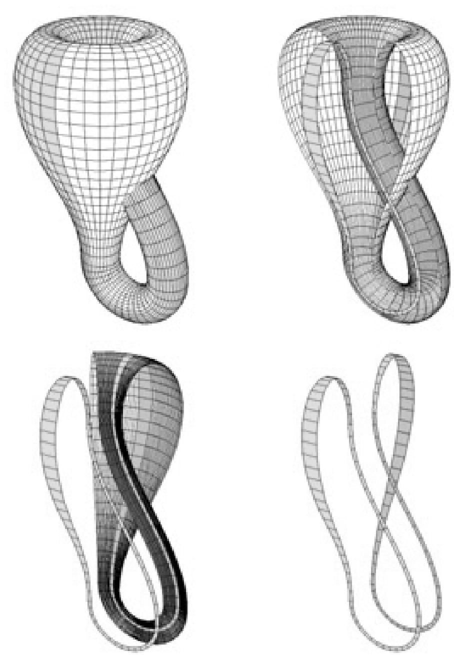
Neorijentabilnost

Sljedeće važno svojstvo Kleinove boce njezina je **neorijentabilnost**. Živi li u neorijentabilnoj plohi mali plosnati stvor, on će nakon jedne kružne šetnje kroz plohu u polaznu točku stići zrcaljen (prisjetite se opet Möbiusove trake).



Sl. 8. Neorijentabilnost Möbiusove plohe

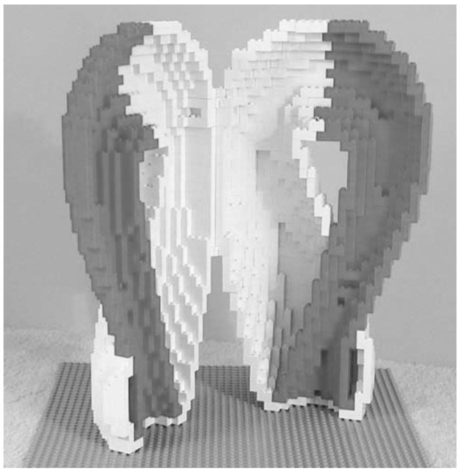
Općenito, za zatvorenu plohu kažemo da je neorijentabilna ako sadrži barem jednu Möbiusovu traku. Dakle, iz svake neorijentabilne plohe rezanjem možete dobiti barem



Sl. 9. Kleinova boca sadrži Möbiusovu traku

jednu Möbiusovu traku. I zaista, uzdužnim rezanjem Kleinove boce dobit ćete dvije međusobno zrcalne Möbiusove trake!

To svojstvo zanimljivo je pogledati na modelu Kleinove boce načinjenom od lego-kockica. Napravio ga je Andrew Lipson, a možete ga vidjeti na njegovoj stranici: `www.lipsons.pwp.blueyonder.co.uk/kleinbottle.htm`.



Sl. 10. Raspolovljena lego-Kleinova boca

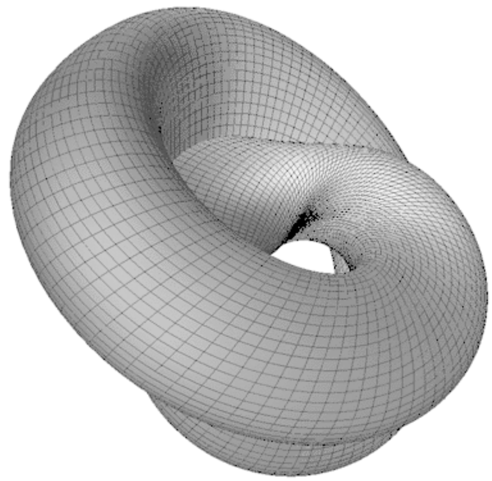
A ako imate papirnati model Kleinove boce, razrežite ga po dužini. Rezultat će biti dvije Möbiusove trake suprotne orijentacije. Pritom imajte na umu da proreza na papiru zapravo nema — slobodno ga zatvorite nakon rezanja.

Osmica

Vrijedi i obrat: spajanjem rubova dviju zrcalno simetričnih Möbiusovih traka, možete dobiti Kleinovu bocu. O tome govore ovi stihovi:

A mathematician named Klein
Thought the Möbius strip was divine
He said "If you glue
The edges of two
You can make a strange bottle like mine".

Ploha koja nastane tim spajanjem izgleda malo drugačije, no zapravo se radi o Kleinovoj boci. I ovdje ona mora prolaziti sama kroz sebe. Model se naziva "osmica" jer podsjeća na "sfrkanu" brojku osam, i jednako je zanimljiv.



Sl. 11. "Osmica"

Evo njegovih parametarskih jednadžbi:

$$x(u,v) = \left[a + \cos\left(\frac{1}{2}u\right)\sin(v) - \sin\left(\frac{1}{2}u\right)\sin(2v)\right]\cos(u)$$

$$y(u,v) = \left[a + \cos\left(\frac{1}{2}u\right)\sin(v) - \sin\left(\frac{1}{2}u\right)\sin(2v)\right]\sin(u)$$

$$z(u,v) = \sin\left(\frac{1}{2}u\right)\sin(v) + \cos\left(\frac{1}{2}u\right)\sin(2v),$$

za $u \in [0, 2\pi)$, $v \in [0, 2\pi)$ i $a > 2$.

Bettijev broj

Kad smo već kod rezanja plohe, evo još jednog zanimljivog svojstva. Radi se o topološkoj invarijanti pod nazivom **Bettijev broj**, a odnosi se na rezanje ploha uz određene uvjete. Ukoliko se radi o plohama s jednim ili više rubova, rez mora ići od ruba do ruba. Ukoliko se pak radi o zatvorenoj plohi, rez mora završiti u točki u kojoj je započeo — on mora biti u obliku jednostavne zatvorene krivulje. Bettijev broj, imenovan prema Enricu Bettiju, talijanskom fizičaru iz 19. stoljeća, najveći je broj takvih rezova nakon kojih ploha ostaje u jednom komadu.

Očito je da je Bettijev broj za list papira jednak nuli – razrežemo li papir od ruba do ruba, neminovno ćemo dobiti dva dijela. Bettijev broj za Möbiusovu traku iznosi 1, a i za cilindar on je također 1. Sferu rezanjem dijelite na dva dijela, pa joj je Bettijev broj jednak 0, ali torus možete razrezati čak dva puta, a ploha će ostati u jednom komadu.

Slično vrijedi i za Kleinovu bocu. Nije teško pokazati da je Bettijev broj Kleinove boce 2. Naime, bocu možete rezati po zadanim pravilima najviše dva puta, a da ploha ostane u komadu. Isprobajte to na svom papirnatom modelu.

Sl. 12. Najveća Kleinova boca na svijetu, visoka 1.1 m, promjera 50 cm, od 15 kilograma čistog Pyrex stakla načinjena je u Kingbridge centru u Torontu, Kanada

I još jedna zanimljivost. Već smo spomenuli da se rezanjem Kleinove boce po dužini dobiju dvije Möbiusove trake. No, Kleinovu bocu moguće je razrezati jednim jedinim rezom u obliku petlje i dobiti samo jednu Möbiusovu traku. Sami otkrijte kako! :-)

Eulerova karakteristika

A sjećate li se definicije Kleinove boce s početka teksta? Napokon, bio bi red objasniti što je to **Eulerova karakteristika**.

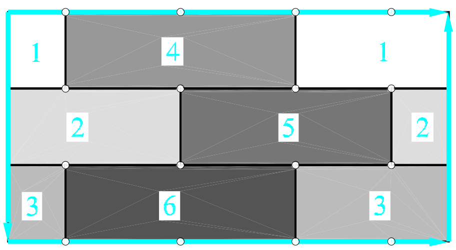
Eulerova karakteristika zatvorene plohe je broj njezinih kritičnih točaka. Jedan od načina računanja je da se od broja minimuma i maksimuma plohe oduzme broj sedala, ili pojednostavnjeno, da se broju vrhova i strana plohe oduzme broj rubova. Radi se o topološkoj invarijanti, osnovnom svojstvu koje jedinstveno određuje vrstu zatvorene plohe, do na orijentabilnost.

Pojednostavnjeno rečeno, znamo li Eulerovu karakteristiku neke plohe, tada zapravo znamo koliko "ručki" ili "rupa" ta ploha ima. Ako je Eulerova karakteristika $x(M)$ parna, taj broj, koji topolozi nazivaju *genus ili rod*, računa se po formuli $\frac{2-x(M)}{2}$, a za neparne x on iznosi $\frac{1-x(M)}{2}$.

Tako, na primjer, sfera ima genus 0, jer je njezina Eulerova karakteristika 2, a torus je orijentabilna zatvorena ploha Eulerove karakteristike 0, pa mu je genus 1 (torus je sfera s jednom rupom). Eulerova karakteristika Kleinove boce je 0, što znači da je genus boce 1 — boca ima jednu ručku.

Kromatski broj

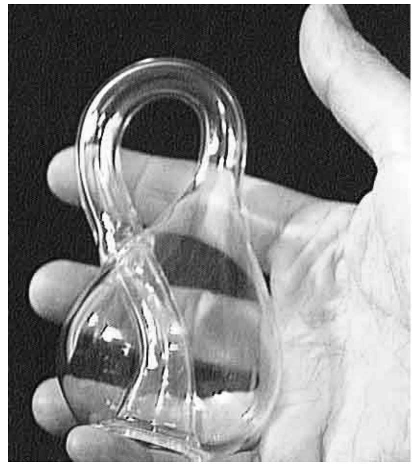
Ah, da, i još nešto. Kromatski broj Kleinove boce je 6. Nije loše i to znati, jer je **kromatski broj** plohe još jedna od topoloških invarijanti. To je najveći broj različitih boja kojima možete obojiti plohu tako da se svaka boja dodiruje sa svakom od preostalih boja. Jasno je da list papira pod ovim uvjetom ne možete obojiti s više od 4 različite boje. Isto vrijedi za sferu i cilindar. Već kod Möbiusove trake kromatski broj skače na 6. Za torus taj broj iznosi čak 7. Na slici je graf koji vam pokazuje kako treba obojiti Kleinovu bocu.



Sl. 13. Kromatski broj Kleinove boce je 6

Volite li "shopping"?

Svidjela vam se Kleinova boca? Pogledajte naš Panoptikum. Iz mnoštva prekrasnih slika Kleinove boce izabrali smo one najzanimljivije. A, poželite li biti ponosni vlasnik jedne staklene Kleinove boce, na Internetu vam se nudi mogućnost kupovine. `Acme Klein bottle` link je koji će vas odvesti na otkačenu web stranicu gdje se nude Kleinove staklenke u nekoliko veličina. Na donjoj je slici najmanja veličina.



Sl. 14. "Eine kleine" Kleinova boca

Na Internetu ćete pronaći i detaljne upute za pletenje kape u obliku Kleinove boce, a ako niste vješti u pletenju, kapu možete kupiti, također na Acmeovoj stranici: `http://www.kleinbottle.com/klein_bottle_hats.htm`. Pritom možete birati između nekoliko modela raznih boja i u paru sa šalom u obliku Möbiusove trake! Zgodna kombinacija, zar ne?

Sl. 15. Ispletite sami!

I na kraju, popijte nešto, ali potegnite iz prave boce!