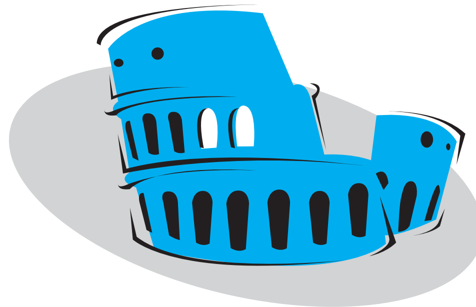


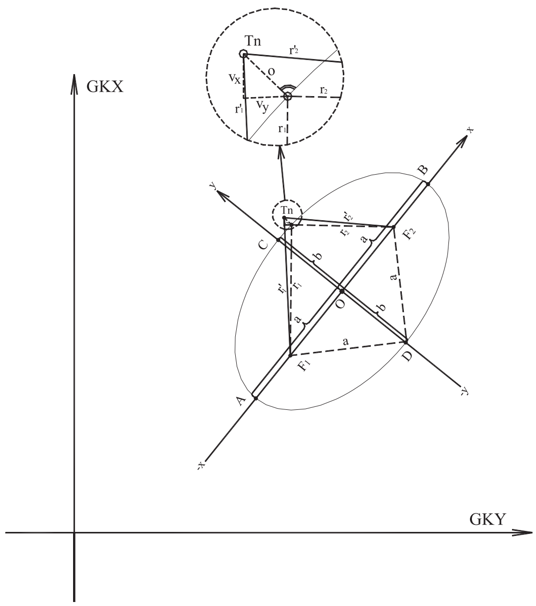
Arena je elipsa

Šime Šuljić, Pazin

Započeti nastavnu jedinicu o elipsi, uzevši za primjer samo putanje planeta oko Sunca ili elektrona oko jezgre atoma, činilo mi se nekako šturim. Istina je da samo te primjere ističe većina udžbenika matematike, ali elipsa kao geometrijski oblik je poznata daleko ranije nego su otkrivene staze planeta, a da ne govorimo o putanjama elektrona. Elipsa se jednostavnim postupkom crtala u pijesku i izgrađivana su zdanja eliptičnog oblika. U traženju zgodnog primjera, teško mi je bilo zaobići zbog neposredne blizine najmonumentalniju građevinu antičke Istre, pulski amfiteatar. Pretpostavio sam da su učenici već posjetili ovaj spomenik nulte kategorije i saznali osnovne činjenice o njemu iz povijesti, pa se pojam elipse može uvesti metodom razgovora, a tijekom obrade nastavne jedinice potkrjepljivati definirane pojmove "živim" podacima. Imajući pred očima sliku popularne Arene i znajući dob kad je nastala, nisam nimalo dvojio da je ta građevina u tlocrtu elipsa. Međutim, posegnuvši za literaturom nemalo sam ostao zbunjen opisom tlocrta amfiteatra kao "policentrične krivulje".

Nisam htio vjerovati da ću jedan zoran primjer morati prekrižiti u svojim pripremama, stoga sam pokušao doći do što preciznijih podataka o Areni. Imao sam sreću da i prije "kopanja" po arhivima saznam da je posljednja i vrlo opsežna i precizna geodetska mjerenja napravio GEOSERVIS iz Pule. Stoga sam stupio u kontakt s inženjerom geodezije Hrvojem Čuljkom, objasnivši mu da mi trebaju osnovni podaci o tlocrtu Arene, jer da me navodi u literaturi i turističkim vodičima zbunjuju. Odgovorio je da je upravo to ono što ga je ponukalo na istraživanje, a najviše od svega ga je zasmetao naziv "policentrična kružnica" (sic!), na koji je naišao u literaturi. Zahvaljujući susretljivosti inženjera Čuljka ubrzo se u mojim rukama našao njegov rad na 8. međunarodnom znanstvenom skupu DRUŠTVO I TEHNOLOGIJA održanom u Opatiji 2001. godine. Najvažniji zaključak toga rada jest da je pulski amfiteatar po svom tlocrtu elipsa!

Proučivši ranije izvedena geodetska istraživanja Arene i analizirajući podatke, odlučio se na originalan pristup mjerenju. Zbog priličnog nagiba terena mjerenja je, za razliku od svih prethodnika, obavio na svim stupovima na istoj nadmorskoj visini (vrh kapitela na drugom katu). Sami kapiteli su zbog oštećenja i visine predstavljali problem. Uz pomoć alpinista izmjereni su i snimljeni neoštećeni rubovi i napravljena je virtualna rekonstrukcija u grafičkom računalnom programu AutoCad. Za razliku od prethodnih mjerenja na raspolaganju mu je bila i najsuvremenija oprema: precizni GPS uređaji, totalne stanice, niveliri i digitalni fotoaparat i obrada podataka snažnim računalima. Podaci izmjereni na 72 stupa predstavljali su solidnu bazu podataka za određivanje prirode krivulje, koju određuje tlocrt Arene.



Slika 1.

Autor se u svom radu služio s nekoliko različitih metoda provjeravanja pretpostavke da izmjerene točke s neznatnim odstupanjima leže na elipsi i potom odredio jednadžbu te elipse. Dobiveni rezultati o osima se različitim metodama razlikuju za svega nekoliko centimetara. Nama je za nastavu matematike najbliža metoda koja se bazira na definiciji elipse. Prisjetimo se da je elipsa s fokusima F_1 i F_2 skup svih točaka ravnine čiji je zbroj udaljenosti do fokusa F_1 i F_2 stalan i jednak duljini velike osi elipse $2a$. Ako bi točka ležala unutar elipse, onda bi zbroj udaljenosti točke od fokusa bio manji od $2a$, a ako bi ležala izvan nje, bio bi veći od $2a$ (slika 1). Za razumijevanje potrebno je imati na umu da geodetske koordinatne osi imaju zamijenjeni položaj u odnosu na matematički koordinatni sustav. Kada imamo samo dvije točke i znamo da te točke pripadaju elipsi, mi ćemo s lakoćom rješavajući sustav jednadžbi doći do njene kanonske jednadžbe. Međutim, u slučaju Arene koordinate izmjerenih točaka samo približno pripadaju pretpostavljenoj elipsi, zbog odstupanja u gradnji i mogućih pogrešaka u mjerenju. Danas postoje snažna i brza računala te razni programi za tabelarne proračune u kojima se pojedini parametri mogu po volji mijenjati. Tako možemo u određenim granicama i s malim promjenama vrijednosti mijenjati koordinate fokusa i veliku os zahtijevajući da zbroj kvadrata razlika duljine velike osi i zbroja duljina radijvektora pojedinih točaka bude minimalan. Iterativni postupak koji treba provesti računalo ing. Čuljak simbolički opisuje ovako:

Poznato:

$y_1, \dots, y_{72}, x_1, \dots, x_{72}$

Odrediti:

$$y_0 = ?, x_0 = ? \quad v_{y1} = ?, \dots, v_{y72} = ?$$
$$a = ?, b = ? \quad v_{x1} = ?, \dots, v_{x72} = ?$$
$$\alpha = ?$$
$$r_{1n} = \sqrt{(y_n - y_{F_1})^2 + (x_n - x_{F_1})^2}$$
$$r_{2n} = \sqrt{(y_n - y_{F_2})^2 + (x_n - x_{F_2})^2}$$
$$v = 2a - (r_{1_n} + r_{2_n})$$

a) mijenjajući (iterativnim postupkom) vrijednosti za: $a, y_{F_1}, x_{F_1}, y_{F_2}, x_{F_2}$, dok se ne postigne $\sum_{vv} \to$ *minimum*

b) izračunati dužinu i smjerni kut između F_1 i F_2:
$$D_{F_1}^{F_2} = \sqrt{(y_{F_2} - y_{F_1})^2 + (x_{F_2} - x_{F_1})^2} = 2e$$
$$v_{F_1}^{F_2} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y_{F_2} - y_{F_1}}{x_{F_2} - x_{F_1}}\right) = \alpha$$

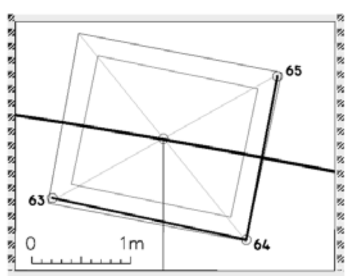
c) izračunati b (malu os elipse):
$$b = \sqrt{a^2 - e^2}$$

d) izračunati y_0, x_0 (koordinate centra elipse): $y_0 = \dfrac{y_{F_1} + y_{F_2}}{2}$, $x_0 = \dfrac{x_{F_1} + x_{F_2}}{2}$.

Rezultat mjerenja i proračuna jest da je Arena **elipsa** s velikom osi $2a = 131.34$ m i malom osi $2b = 104.53$ m. Omjer velike i male osi je 1.256, dakle približno 5:4. Velika os zakrenuta je za kut od 17°32’ u smjeru kazaljke na satu u odnosu na geodetsku koordinatnu os x, odnosno na smjer sjever–jug. Naravno da sve mjerene točke ne leže na “otkrivenoj” elipsi, ali odstupanja su u granicama pedlja, što je s obzirom na dimenzije zdanja i prilično grubu gradnju zanemarivo. Zanimljivost navedenog rada je tabelarni prikaz svih izmjerenih kapitela. U prvom su stupcu koordinate mjerene točke i njeno odstupanje po osima od proračunate elipse. U drugom je skica kapitela i položaj njegova središta u odnosu na elipsu. U trećem je stupcu fotografija samog kapitela. Kapiteli su ogromni kameni blokovi približne dužine 2 m i širine 1.75 m.

Navedimo još nekoliko poznatih podataka o Areni. Visina s morske strane je 32.5 metara. Vanjski je plašt građen od pravilnih kamenih blokova, veličine i do 2 m^3. Samo u vanjski plašt ugrađeno je više od 8 000 m^3 kamena. Borilište je veličine 67.90×41.60 m i ispod njega su se nalazile prostorije za opremu. Borilište je bilo odvojeno zidom visokim tri metra. Oko borilišta se protezao natkriveni hodnik s više vrata za ulazak gladijatora. Amfiteatar je mogao primiti 23 000 gledatelja. Kroz povijest Arena je služila kao skladište besplatnog građevnog materijala, pa su sjedišta i mnogi dijelovi unutrašnjosti razneseni. Nad sjedištima se podizao platneni krov za zaštitu od sunca. Vrijeme gradnje amfiteatra većina povjesničara smješta u I. st.n.Kr. Naziv Arena dolazi od latinske riječi, a znači pijesak kojim se pokrivalo borilište.

U nastavi matematike često nam nedostaju zgodni primjeri koji ukazuju na primjenjivost matematike. Ova kratka priča i ilustracije o Areni prilog su prevladavanju tog problema. Na kraju, pokušajmo zamisliti rimske graditelje kako natežu konopac ili žicu pričvršćene krajevima za dobro zabijene kolce i određuju rubne točke tlocrta amfiteatra. Možda nas to ponuka da i mi jedan sat matematike izvedemo na otvorenom s dva kolčića i špagom. Samo jedan od petstotinjak, koliko ih učenik kroz srednje školovanje ima. Tim jednim ležernim satom ništa se bitno ne može izgubiti, a učenika možemo pridobiti za matematiku.

Koord. osi i odstupanja		Skica snimanja Kapitela	Fotografija Kapitela	Broj
Y	5409573.17			13
X	4970527.15			
H	24.55			
v_Y	0.01			
v_X	0.00			
v_H	0.14			