Poopćenje

jedne uvjetne algebarske nejednakosti

Šefket Arslanagić, Sarajevo

Pitanju mogućnosti poopćenja (generalizacije) neke tvrdnje u matematici treba u svakom slučaju posvetiti izuzetnu pažnju u radu s matematički nadarenim učenicima. Inače, takva sposobnost brze i široke generalizacije matematičkih objekata, relacija i operacija je često karakteristika matematički nadarenih učenika. To ima ogroman značaj u izgrađivanju mlade ličnosti budućeg matematičara. Nastavnik bi trebao ukazivati uvijek, ukoliko to problem ili tvrđenje omogućuju, na mogućnost poopćenja jer je to jedan od prvih koraka uvođenja mlade ličnosti u matematiku kao nauku a što će za učenike biti od velike koristi i važnosti u budućem radu.

Nejednakost

U ovom članku dokazivat ćemo jednu nejednakost i dati njeno poopćenje koje ćemo dokazati na tri načina. Riječ je o sljedećoj nejednakosti:

Ako je

$$a^2+b^2=1 \quad i \quad c^2+d^2=1,$$

$$(a,b,c,d\in\mathbf{R})$$

vrijedi nejednakost:

$$-1\le ac-bd\le 1.$$

Dokaz 1. Poći ćemo od očigledne nejednakosti:

$$(a+c)^2+(b-d)^2\ge 0$$

ili

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac-bd)\ge 0.$$

Kako je iz uvjeta zadatka

$$a^2+b^2+c^2+d^2=2,$$

to iz gornje nejednakosti dobivamo

$$2+2(ac-bd)\ge 0,$$

tj.

$$ac-bd\ge -1. \tag{1}$$

Također iz očigledne nejednakosti

$$(a-c)^2+(b+d)^2\ge 0$$

dobivamo

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2(bd-ac)\ge 0,$$

a odavde zbog $a^2+b^2+c^2+d^2=2$

$$2+2(bd-ac)\ge 0,$$

tj.

$$1+bd-ac\ge 0,$$

odnosno

$$ac-bd\le 1. \tag{2}$$

Sada iz (1) i (2) dobivamo

$$-1\le ac-bd\le 1,$$

ili

$$|ac-bd|\le 1,$$

što je trebalo dokazati.

Dokaz 2. Ako pomnožimo jednakosti $a^2+b^2=1$ i $c^2+d^2=1$ iz uvjeta zadatka, dobivamo

$$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=1,$$

ili

$$a^2c^2+a^2d^2+b^2+c^2$$
$$+b^2d^2+2abcd-2abcd=1,$$

a odavde

$$(ac-bd)^2+(bc+ad)^2=1.$$

Kako je $(bc+ad)^2 \le 1$, to mora biti

$$(ac-bd)^2 \le 1,$$

tj.

$$-1 \le ac-bd \le 1,$$

ili

$$|ac-bd| \le 1,$$

što je i trebalo dokazati.

Dokaz 3. Iz uvjeta zadatka $a^2+b^2=1$ i $c^2+c^2=1$ možemo uzeti da je $a=\sin\alpha$, $b=\cos\alpha$, $c=\sin\beta$ i $d=\cos\beta$ ($\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ i $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ su osnovni trigonometrijski identiteti). Tako sada treba dokazati da je

$$|\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta| \le 1,$$

što je očigledno točno jer je

$$|-\cos(\alpha+\beta)| \le 1.$$

Napomena 1. Na sličan način, polazeći od očiglednih nejednakosti

$$(m-a)^2+(n-b)^2+(p-c)^2 \ge 0$$

i

$$(m+a)^2+(n+b)^2+(p+c)^2 \ge 0,$$

dokazuje se nejednakost

$$-1 \le ma+mb+pc \le 1,$$

odnosno

$$|ma+nb+pc| \le 1,$$

uz uvjet:

$$a^2+b^2+c^2=1 \quad \text{i} \quad m^2+n^2+p^2=1;$$
$$(a,b,c,m,n,p \in \mathbf{R}).$$

Poopćenje

Sada se prirodno nameće pitanje može li se ovaj zadatak poopćiti. Odgovor je potvrdan. Dakle, dokazat ćemo da vrijedi sljedeća nejednakost:

$$-1 \le a_1b_1+a_2b_2+\ldots a_nb_n \le 1, \quad (3)$$

uz uvjet:

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1$$

i

$$b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=1,$$

gdje su

$$a_i, b_i \in \mathbf{R}, \ (i=1,2,\ldots,n).$$

Dokaz 1. Poći ćemo od očiglednih nejednakosti

$$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2 \ge 0, \quad (4)$$

$$(a_1+b_1)^2+(a^2+b^2)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2 \ge 0, \quad (5)$$

i uvesti zamjenu:

$$x=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n.$$

Sada iz nejednakosti (4) i (5), zbog uvjeta zadatka $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1$ i $b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=1$, dobivamo nakon kvadriranja:

$$2-2x \ge 0, \quad (6)$$

$$2+2x \ge 0. \quad (7)$$

Sada iz (6) i (7) dobivamo:

$$-1 \le x \le 1,$$

ili

$$-1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq 1,$$

tj.

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \leq 1,$$

što znači da je nejednakost (3) točna.

Dokaz 2. Iz nejednakosti između kvadratne i geometrijske sredine, slijedi

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{ab},$$

za sve $a, b \in \mathbf{R}^+$, pa je svakako odavde:

$$|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}; \quad (a, b \in \mathbf{R}). \qquad (8)$$

Koristit ćemo i činjenicu da je apsolutna vrijednost zbroja n realnih brojeva manja ili jednaka od zbroja apsolutnih vrijednosti tih brojeva. Sada imamo zbog (8):

$$\begin{aligned} &|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \\ &\quad \leq |a_1b_1| + |a_2b_2| + \ldots + |a_nb_n| \\ &\quad \leq \frac{a_1^2+b_1^2}{2} + \frac{a_2^2+b_2^2}{2} + \ldots + \frac{a_n^2+b_n^2}{2} \\ &\quad = \frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}{2} \\ &\quad = \frac{1+1}{2} = 1, \end{aligned}$$

tj.

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \leq 1,$$

ili

$$-1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq 1,$$

što je i trebalo dokazati.

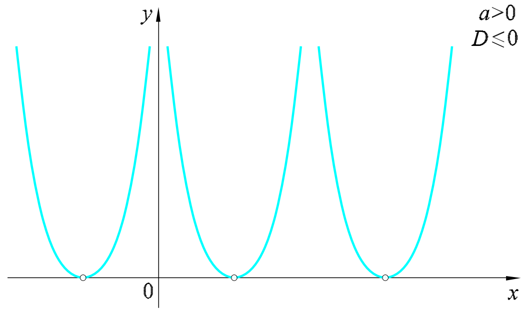
Dokaz 3. Ovdje ćemo koristiti činjenicu da je

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbf{R}),$$

ako je

$$a > 0 \quad \text{i} \quad D = b^2 - 4ac \leq 0. \qquad (9)$$

Grafičko tumačenje:



Poći ćemo od n očiglednih nejednakosti:

$$\begin{aligned} (a_1x - b_1)^2 &\geq 0, \\ (a_2x - b_2)^2 &\geq 0, \\ &\vdots \\ (a_nx - b_n)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} a_1^2x^2 - 2a_1b_1x + b_1^2 &\geq 0, \\ a_2^2x^2 - 2a_2b_2x + b_2^2 &\geq 0, \\ &\vdots \\ a_n^2x^2 - 2a_nb_nx + b_n^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Nakon zbrajanja ovih nejednakosti, dobivamo:

$$\begin{aligned} &(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)x^2 \\ &\qquad - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)x \\ &\qquad\qquad + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 \geq 0, \end{aligned}$$

a odavde zbog uvjeta $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1$ i $b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = 1$:

$$x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)x + 1 \geq 0.$$

Da bi ova nejednakost bila točna, mora zbog (9) biti:

$$a = 1 > 0 \quad \text{i} \quad D < 0, \text{ tj.}$$

$$D = 4(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 - 4 \leq 0,$$

a odavde

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq 1, \text{ tj.}$$

$$-1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq 1,$$

odnosno

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \leq 1,$$

što je trebalo dokazati.