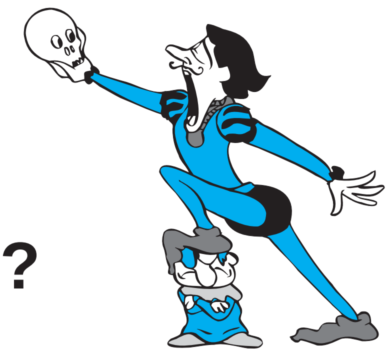


Kakva je veza među veličinama u zadatku?

Patar Vranjković, Zadar

Ima zadataka koje učenici jednostavno ne vole (što ne znači da ne vole i matematiku), a neki zadaci ih i frustriraju. Da li možda pretjeruju?! Što zapravo učenici ne vole? Učenici ne vole da je zadatak koji je privukao njihovu pozornost i na određen način zaslužio njihov trud, nerješiv ili da nema smisla. Pitanje je radi li se o dobro odabranom zadatku ili ne, ali je sigurno da se ne radi o zadatku koji služi za "jednokratnu uporabu". No zadatak koji je na prvi pogled (i ne samo tada) nerješiv ili nema smisla, ima neku podlogu, iz njega izviru razna pitanja, njime nešto naslućujemo, pretpostavljamo, ali analizu tek treba provesti. Takvi zadaci nose jedan značajan aspekt matematike – oni donose otkriće, naravno, u početku ništa spektakularno, ali zato ništa manje značajno. I kada na određen način i uz značajne napore dođemo do rješenja, kakvo god ono bilo, onda vjerojatno shvatimo i svu ljepotu koju nam donosi matematika. Zato, ako se takvi zadaci ne mogu naći, onda ih valja izmisliti.

Zašto u nekim zadacima rješenja nemaju smisla? Na to pitanje mogu se nadovezati i neka druga pitanja. Da li je zadatak uopće korektan ili nije? Jesu li zadani uvjeti dovoljni da bi se odredila nepoznanica? Ima li možda suvišnih podataka?

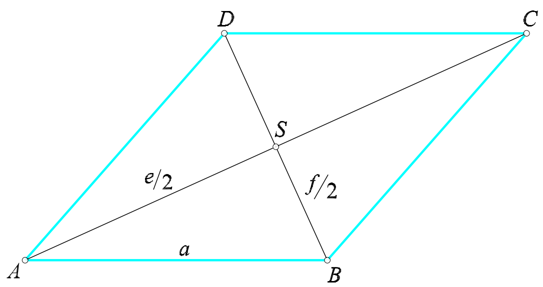
Ali mnogi učenici rješavanje takvog zadatka ne započinju s takvim pitanjima, a svakako bi bilo dobro "u ranoj fazi" otkriti je li sa zadatkom "sve u redu". No, pitanja su svakako značajna. To će pokazati i primjeri.

Evo, počnimo s jednim primjerom.

Primjer 1.

U rombu je zadano: $e+f=28$, $a=10$. Nađi duljine dijagonala e i f.

Rješenje. Nacrtajmo sliku.



Sada promatrajmo pravokutni trokut ABS, u kojem je poznato $e/2+f/2=14$ i $a=10$. Uvjet da je jedna stranica trokuta manja od zbroja drugih dviju je ispunjen, jer je $a=10<e/2+f/2=14$. Nadalje, prema Pitagorinom poučku imamo $(e/2)^2+(f/2)^2=100$, pa valja riješiti sustav

$$e/2+f/2=14 \qquad (1)$$

$$(e/2)^2+(f/2)^2=100. \qquad (2)$$

Ako (1) kvadriramo pa od dobivene jednadžbe oduzmemo (2), dobijemo

$$e/2\cdot f/2=48. \qquad (3)$$

Prema Vièteovim formulama, iz (1) i (3) čitamo da su $e/2$ i $f/2$ rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 14x + 48 = 0$, koja iznose $x_1 = 8 = e/2$, $x_2 = 6 = f/2$, pa su, prema tome, duljine dijagonala $e = 16$, $f = 12$.

Ništa posebno, rekli bismo.

Ali nastavimo s gotovo istim primjerom.

Primjer 2.

U rombu je zadano: $e + f = 32$, a $a = 10$. Nađi duljine dijagonala e i f.

Rješenje. Poslužimo se slikom iz primjera 1. pa opet promatrajmo pravokutni trokut ABS u kojem je sada poznato $e/2+f/2 = 16$, $a = 10$. Ispunjen je uvjet $a = 10 < e/2 + f/2$. Prema Pitagorinu poučku imamo $(e/2)^2 + (f/2)^2 = a^2 = 100$ i rješavamo sustav:

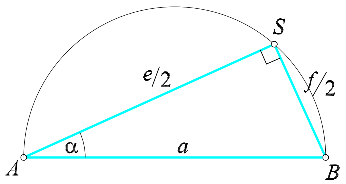
$$e/2 + f/2 = 16$$
$$(e/2)^2 + (f/2)^2 = 100,$$

slično kao u primjeru 1., čime dobijemo $e/2 + f/2 = 78$. Prema Vièteovim formulama, $e/2$ i $f/2$ su rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 16x + 78 = 0$, koja glase

$$x = 8 \pm \sqrt{64 - 78} \notin \mathbf{R}.$$

Dakle, sada nema rješenja.

Zašto u primjeru 1. imamo, a u primjeru 2. nemamo rješenja? Da bismo odgovorili ma to pitanje, dovoljno je promatrati pravokutni trokut ABS. Prema Talesovom poučku, imamo ovu sliku.



Prvo mora biti ispunjen uvjet $e/2 + f/2 > a$. Pokazat ćemo, međutim, da $e/2 + f/2$ ne smije biti veći od nekog određenog broja.

Kojeg?

Sa slike čitamo $e/2 = a \cos \alpha$, $f/2 = a \sin \alpha$, pa kada te dvije jednadžbe zbrojimo, imamo $e/2 + f/2 = a(\sin \alpha + \cos \alpha)$, a nakon kvadriranja zadnje jednakosti dobijemo

$$(e/2 + f/2)^2 = a^2(1 + \sin 2\alpha). \qquad (1)$$

Ako je $\alpha = 45^\circ$, onda iz (1) izlazi

$$(e/2 + f/2)^2 = 2a^2. \qquad (2)$$

Ako je α šiljasti kut, ali $\alpha \neq 45^\circ$, onda je $\sin 2\alpha < 1$, pa iz (1) izlazi

$$(e/2 + f/2) < 2a^2. \qquad (3)$$

Najzad iz (2) i (3) dobijemo

$$e/2 + f/2 \leq a\sqrt{2}.$$

Prema tome, konačni uvjeti glase

$$a < e/2 + f/2 \leq a\sqrt{2}. \qquad (4)$$

Sada možemo jasno kazati: u primjeru 1. uvjeti su ispunjeni, a u primjeru 2. nisu, pa je zato rezultat onakav kakav jest.

No zadržimo se još malo na ovim primjerima.

Što još možemo reći?

Zavisnost hipotenuze a o katetama $e/2$ i $f/2$ potpuno je određena i ta određenost dolazi preko Pitagorina poučka, tj. jednadžbe $a^2 = (e/2)^2 + (f/2)^2$ (naime, prva se može potpuno odrediti iz drugih!). Ali, zavisnost između hipotenuze a i zbroja kateta $e/2$ i $f/2$ je nepotpuna, i izražena je nejednadžbom $a < e/2 + f/2 \leq a\sqrt{2}$ (sada se iz njih ne može potpuno odrediti).

Na temelju ovih jednostavnih primjera možemo reći neke općenite stvari.

Najprije valja podsjetiti da u nekom zadatku imamo zadane (poznate) i nepoznate veličine. A zna se i svrha: iz zadanih odrediti nepoznate veličine. Kada se to može ostvariti, odnosno kada će to biti moguće?

Prvo, zadane veličine moraju zadovoljavati neke uvjete:

— međusobna nezavisnost,

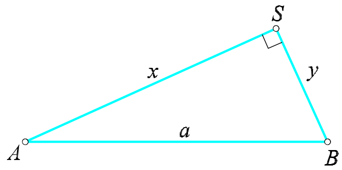
— dovoljna brojnost (kako bi se pomoću njih našle nepoznate veličine).

Drugo, mora postojati neka relacija između zadanih i nepoznatih veličina. Tako, npr., 3 kuta u trokutu nisu međusobno nezavisne veličine (njihov zbroj mora iznositi 180°).

Ali sa stranicama trokuta stvari stoje drugačije. Naime, stranice trokuta nisu potpuno nezavisne veličine. Dvije stranice možemo izabrati po volji, ali tada treća više nije nezavisna od njih (ona mora biti veća od razlike, a manja od zbroja drugih dviju stranica). U ovom slučaju obično govorimo o nepotpunoj zavisnosti među veličinama.

Sada dolazimo i do cilja ovog članka, a to je odgovoriti na pitanje kako u nekom zadatku naći nepotpunu zavisnost među veličinama?

Da bismo lakše došli do odgovora, mi ćemo naš(e) primjer(e) poopćiti. Radi jednostavnosti, trokut ABS opišimo ovako



Neka je $x + y = b$ i $x^2 + y^2 = a^2$. Nađi x i y ako su poznati a i b.

Najprije imamo

$$y = b - x \qquad (1)$$

$$x^2 + (b-x)^2 - a^2 = 0.$$

Nakon sređivanja izlazi

$$2x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0.$$

Ovo je kvadratna jednadžba po nepoznanici x. Kako x mora biti realan broj, tada diskriminanta mora biti nenegativna, tj. $2a^2 - b^2 \geq 0$, odnosno

$$b \leq a\sqrt{2}. \qquad (2)$$

No, sada je

$$x = \frac{2b \pm 2\sqrt{2a^2 - b^2}}{4} = \frac{b \pm \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}. \qquad (3)$$

Prema (3), iz (1) izlazi

$$y = \frac{b \mp \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}, \qquad (4)$$

pa su katete

$$x = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}, \quad y = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}. \qquad (5)$$

Brojevi u relaciji (5) bit će realni ako vrijedi uvjet (2). Ali to nije sve. Broj y iz relacije (5) mora biti pozitivan (x je već pozitivan!), a to će biti onda i samo onda ako je $b > \sqrt{2a^2 - b^2}$, odnosno, nakon kvadriranja i sređivanja

$$b > a. \qquad (6)$$

Konačno, (2) i (6) govore da je zadatak moguć ako vrijedi

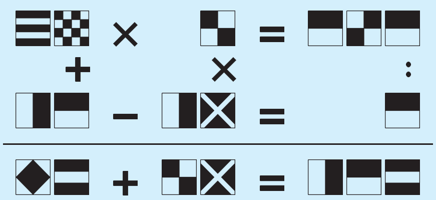
$$a < b \leq a\sqrt{2}.$$

A to smo i ranije dobili, ali na drugačiji način.

Sada možemo dati odgovor na ranije postavljeno pitane. Zadatak treba postaviti općenito, riješiti ga i provesti analizu kojom ćemo doći do intervala koji sadrži zadane veličine i "nosi" nepotpunu zavisnost među veličinama u zadatku.

Zamijenite simbol odgovarajućom znamenkom!

3.



4.