Calculus made easy

Silvanus P. Thompson, Martin Gardner, St. Martin's Press, New York

Ela Rac–Marinić–Kragić, Zagreb

Nakon što sam pročitala knjigu odlučila sam o njoj napisati nekoliko stranica jer me oduševila svojom jednostavnošću i ljepotom.

Za sam početak evo jedne anegdote koja je tipična i za pristup diferencijalnom računu u ovoj knjizi.

Klasična mozgalica: Dvije lokomotive udaljene 100 milja jure jedna prema drugoj istim tračnicama. Svaka lokomotiva juri brzinom od 50 milja na sat. Ispred jedne lokomotive je muha koja leti naprijed i natrag između lokomotiva i njezin let (kojim opisuje stazu sastavljenu od sve kraćih cik-cak linija) završava kada se lokomotive sudare. Ako muha leti brzinom 80 milja na sat, koliko će preletjeti prije sudara?

Idemo li zbrajati beskonačni niz sve kraćih cik-cak linija, nećemo tako lako doći do rezultata. Ali to nije niti potrebno. Vlakovi će se sudariti točno za jedan sat, pa kako muha leti brzinom od 80 milja na sat, ona će prije sudara stići preletjeti 80 milja.

Glasovitom matematičaru Johnu von Neumannu navodno su postavili ovaj problem. Neumann je promislio trenutak prije nego je izrekao ispravan odgovor. "Točno," kazao mu je postavljač pitanja, "a većina je ljudi mislila da ćete tražiti sumu beskonačnog niza". Von Neumann ga je začuđeno pogledao s konstatacijom da je upravo tako i riješio problem.

I u ovoj se knjizi uvodi čitatelja u analizu, diferencijalni i integralni račun na začuđujuće jednostavan i nestandardan način. U *Pogovoru* sam Gardner pretpostavlja da će ozbiljan profesionalni matematičar, dopadne li mu u ruke, sigurno pokuditi ovu knjigu.

Prvo, zato jer ona ukazuje kako je zapravo većina operacija diferencijalnog računa smiješno lagana.

Drugo, jer razobličava uvriježene priče matematičara kako je *Analiza* jedan od najtežih kolegija.

Treće, jedna od najtežih opaski bit će kako niti jedna od metoda nije strogo i potpuno matematički dokazana. Sve je pojednostavnjeno u svrhu rješavanja problema. Ali zašto ne? Apsurdno je od početnika u *Analizi* očekivati stroge dokaze, jednako kao što je i od djeteta koje tek počinje govoriti apsurdno očekivati ispravnu sintaksu.

Gardner kaže i sljedeće: jedan od razloga zašto je ova knjiga tako dostupna je upravo što je autor izbacio najteže stvari. Ali to je stoga što ona i jest namijenjena onima koji počinju s *Analizom*, a takvima su do sada elementi tog računa bili prezentirani na najgori mogući način sa svim teškoćama i preponama.

Krenimo iz početka.

Calculus made easy napisao je Silvanus Phillips Thompson, rođen 1851. g., profesor fizike na Tehničkom koledžu u Finsburyju u Engleskoj. Knjiga se u Engleskoj prvi puta pojavila 1910. g. pod pseudonimom F.R.S. (Fellow of the Royal Society) i identitet autora je otkriven tek nakon njegove smrti 1916. g. Knjiga je doživjela nekoliko preuređenja i izdanja.

Martin Gardner (1914. g., američki matematičar, u svijetu matematičke znanosti stekao je velik ugled premda nema akademsku titulu) napravio je ozbiljne zahvate i prilagodio knjigu modernom matematičkom izričaju, napisao je prošireni uvod i dodao tri uvodna poglavlja. Također je dodao više od dvadeset problema za vježbu i zabavu.

Dva najvažnija pojma Analize su funkcije i limesi. Gardner je dodao dva uvodna poglavlja kako bi opisao pojam funkcije i pojam limesa jer je Thompson pretpostavio da su čitatelju ti pojmovi jasni. Također je dodao i kratak uvod u pojam derivacije.

Moderne knjige iz analize nerijetko sadrže više od tisuću stranica, postaju sve debljima, prepune kompjutorskih grafika, fotografija eminentnih matematičara i nisu nimalo lakše za razumijevanje. Neki od reformatora u matematici prigovaraju pak da, iako slične knjige iz napredne analize postaju sve debljima, stvarna je potreba za njima sve manja. Jedan od razloga je i razvoj kompjutorske tehnologije. Mnogi danas drže kako bi u učenju matematike analiza trebala prepustiti dio prostora kombinatorici, teoriji grafova i topologiji, teoriji grupa i matrica, teoriji brojeva, logici, statistici i napokon računarstvu.

Nekoć su u školama učenici morali izračunavati kvadratni i kubni korijen iz realnog broja, a danas je teško naći mladog matematičara koji zna ručno naći i kvadratni korijen. Logaritmi koji su se nekoć koristili pri množenju velikih brojeva zastarijevaju poput logaritamskog računala koje je izašlo iz upotrebe.

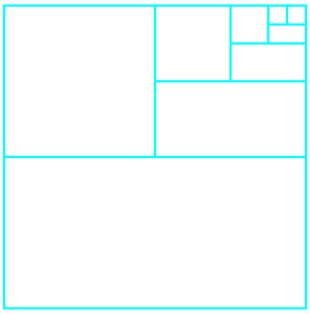
Nešto slično događa se i u analizi. Studenti ne vide razloga zašto bi morali izvoditi mukotrpne metode deriviranja i iscrpljujućeg integriranja "ručno", kada kompjutori danas rade taj posao. Sve to ipak ne znači, slaže se većina reformatora, da je analiza suvišna. Naprotiv, ona je esencijalna i u poznavanju načina rada kompjutora. Oni predlažu nov pristup u poučavanju analize. Neki reformatori smatraju da integralni račun treba uvesti prije derivacija. Drugi pak misle da klasičan pristup treba zamijeniti primjenom u teoriji vjerojatnosti i statistici.

Mnoge knjige iz analize su ili previše elementarne ili prenapredne. Thompson je u ovoj knjizi pronašao pravu mjeru.

U poglavlju "Što je limes" Gardner na dostupan način približava pojam limesa. Kako zorno pokazati da red $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ konvergira u 1, možemo vidjeti i na slici 1.

Uz ovaj primjer ide i zgodna anegdota. Profesor matematike postavio je studenta na jednu stranu prazne prostorije i prekrasnu studenticu pokraj suprotnog zida. Student po naredbi prijeđe polovinu udaljenosti prema djevojci, trenutak zastane, zatim prijeđe polovinu preostale udaljenosti, opet se zaustavi i tako nastavlja. Djevojka se nasmije:"Ha–ha, nikada me nećeš doseći!" Momak odgovara:

"Istina, ali mogu doći dovoljno blizu za sve praktične potrebe!"



Slika 1.

Evo još jednog zornog primjera koji pokazuje kako izračunati zbroj bilo kojeg konvergentnog geometrijskog reda bez korištenja poznate formule.

Neka je $x = 6 + \frac{9}{2} + \frac{27}{8} + \dots$. Kako je svaki član jednak $\frac{4}{3}$ svog sljedbenika, obje strane pomnožit ćemo s $\frac{4}{3}$ da bismo dobili:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}x &= 8 + 6 + \frac{9}{2} + \frac{27}{8} + \dots \\
\frac{4}{3}x &= 8 + x \\
4x &= 24 + 3x \\
x &= 24.
\end{aligned}$$

Primijetimo kako ovakvim redom možemo izračunati ukupni put što ga prijeđe lopta koja skače i svaki put se odbija od poda na $\frac{3}{4}$ od prethodno dostignute visine. Neka je lopta započela padati s visine od 4 m. Ona se prvi put odbila na visinu od 3 m, zatim pala natrag na pod (padala je ponovo 3 m), odbila se od poda, dosegla visinu od $\frac{9}{4}$ m, i tako redom. Zato zbroju x još moramo dodati 4 m. Lopta je prešla ukupan put od 28 m prije nego se posve zaustavila.

U svom prvom poglavlju Thompson govori o dvama simbolima koji se koriste u integralnom i diferencijalnom računu. Ta dva simbola su

(1) d, koji možemo čitati "*mali dio od*".

Tako dx znači mali dio od x. Ove male dijelove možemo smatrati beskonačno malenima.

(2) $\int$, koji možemo zvati "*zbroj od*".

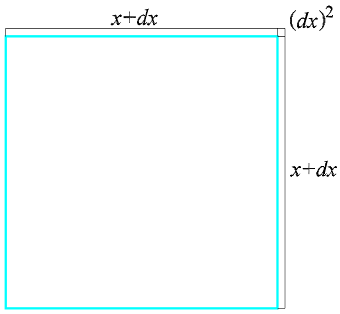
Tada $\int dx$ zapravo znači zbroj svih malih dijelova od x, što je zapravo x.

Drugi paragraf nosi naziv "Različiti stupnjevi malih veličina".

Kao primjer uzima se $1/100$ kao *mali* dio prvog reda. Tada će $1/100$ od $1/100$, tj. $1/10000$ biti mali dio drugog reda, a $1/1000000$ mali dio trećeg reda itd. ...

Ako je dx mali dio od x, tada će $dx \times dx$ biti zanemariv kao mali dio drugog reda, a također i svi mali dijelovi višeg reda ($(dx)^3$, $(dx)^4, \dots$).

Promatrajmo funkciju $f(x) = x^2$. Pretpostavimo da je x veličina koja poraste za mali iznos dx, dakle postaje $x + dx$. Kvadrat tada iznosi $x^2 + 2x \cdot dx + (dx)^2$. Drugi član nije zanemariv jer je to mala veličina prvog reda, dok je treći član mala veličina drugog reda (mali dio od malog dijela) pa ga možemo zanemariti. Ovo možemo zorno prikazati slikom 2, na kojoj se vidi zašto je $(dx)^2$ zanemariv kao mala veličina drugog reda.



Slika 2.

Kako bi autor još zornije pokazao zašto se male veličine višeg reda mogu zanemariti, uzeo je *peni*, kao stoti dio dolara. Peni je već mali iznos u odnosu na dolar, a još manji u odnosu na 100 dolara. Ako usporedimo peni s 10000 dolara, imat ćemo stvarno zanemariv iznos.

Zatim se uvodi omjer $\frac{dy}{dx}$ – "*derivacija y po x*" kao omjer dviju varijabli koje se mijenjaju – dok x raste, y raste ili pada. Ovdje pristup deriviranju nije pomoću limesa omjera $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kada Δx teži u nulu, već putem metode "*iscrpljivanja*". Thompson ne koristi izraz Δx.

Pogledajmo jednostavan primjer traženja derivacije za $y = x^2$. Ako varijabla x malo poraste za dx i poprimi vrijednost $x + dx$, tada će y poprimiti vrijednost $y + dy$.

$$y + dy = (x + dx)^2$$
$$y + dy = x^2 + 2x \cdot dx + (dx)^2 .$$

Ovdje $(dx)^2$ zanemarujemo kao malu veličinu drugog reda (zanemarivo malu veličinu). Tada imamo

$$y + dy = x^2 + 2x \cdot dx$$
$$dy = 2x \cdot dx$$
$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

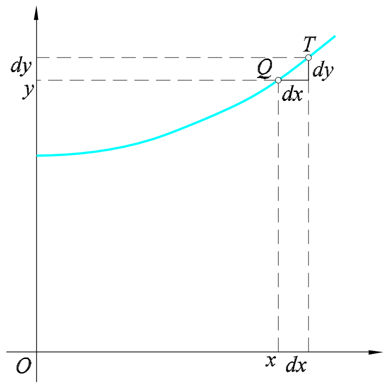
Tako smo našli omjer rasta y u odnosu na x i on iznosi $2x$.

Na sličan se način uvodi derivacija svih osnovnih funkcija, derivacija zbroja i razlike, produkta i kvocijenta, kao i takozvano ulančano deriviranje, tj. deriviranje složenih funkcija.

U paragrafu "Geometrijsko značenje derivacije" na zanimljiv je način predočena geometrijska reprezentacija omjera $\frac{dy}{dx}$. Funkciju možemo prikazati njezinim grafom. Uzmimo bilo koju točku Q grafa s koordinatama (x, y) (vidi sliku 3.) i promatrajmo kako se y mijenja ako x varira.

Neka x poraste za mali iznos dx prema desno, tada će i y za ovu krivulju porasti za mali iznos dy gore.

Tada omjer $\frac{dy}{dx}$ mjeri nagib rasta ove funkcije između točaka Q i T. Zapravo, iz grafa je vidljivo da je između ovih dviju točaka puno različitih nagiba i ne možemo sasvim precizno govoriti o nagibu krivulje između točaka Q i T. Međutim, kada bi Q i T bile toliko blizu jedna drugoj da bi mali dio krivulje QT bio praktički linearan (ravan), tada bismo mogli reći da $\frac{dy}{dx}$ predstavlja nagib krivulje duž QT. Pravac QT dodiruje krivulju samo duž dijela QT, a ako je taj dio beskonačno malen, pravac će dirati krivulju praktički u jednoj točki Q i bit će tanegenta na krivulju. Ta će tangenta imati isti nagib $\frac{dy}{dx}$ kao i krivulja u točki Q.

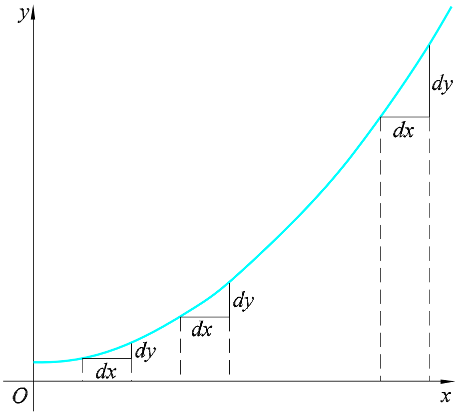


Slika 3.

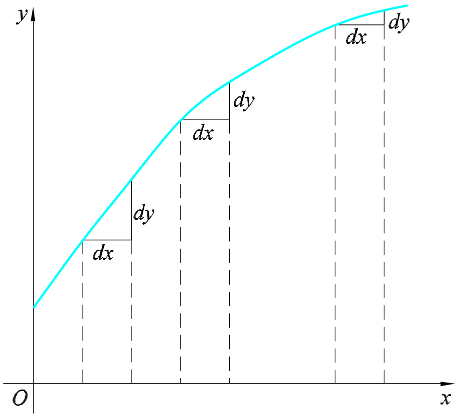
Ako krivulji nagib raste blago, tada će i omjer $\frac{dy}{dx}$ biti malen, puno manji od 1. Za horizontalnu liniju, kao i za mjesto na krivulji gdje nema rasta niti pada nagib je 0, pa je i omjer $\frac{dy}{dx}$ jednak 0. Ako krivulja pada, nagib će biti negativan pa će i $\frac{dy}{dx}$ imati negativan predznak. Ako je krivulja ravna linija, tada je vrijednost $\frac{dy}{dx}$ svugdje jednaka, pa je nagib konstantan.

Ako krivulja raste sve strmije prema gore, $\frac{dy}{dx}$ postaje sve veći, a ako krivulja postaje sve ravnija, tj. sve blažeg nagiba, tada $\frac{dy}{dx}$ postaje sve manji. Ovo se zorno vidi sa slika 4 i 5.

Ako krivulja prvo pada pa onda raste, tada je nagib na početku negativan i približava se 0 kako je krivulja sve ravnija, zatim će u točki gdje je postignut *lokalni minimum* biti 0, a dalje $\frac{dy}{dx}$ ima pozitivne vrijednosti koje rastu. Slično se može zaključiti za krivulje koje prvo rastu, a zatim opadaju – kod njih su vrijednosti za $\dfrac{dy}{dx}$ najprije pozitivne, ali se smanjuju, zatim je 0 na mjestu gdje se postiže *lokalni maksimum* i zatim su vrijednosti negativne.

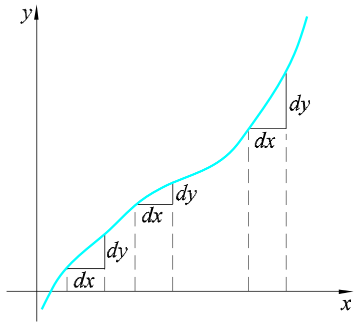


Slika 4.



Slika 5.

Gardner napominje da krivulja ne mora imati najmanju, odnosno najveću vrijednost na mjestu lokalnog minimuma, tj. maksimuma. Karakteristika je lokalnog minimuma da krivulja mora imati veće vrijednosti s obiju strana te točke, a maksimuma da ima manje vrijednosti s obiju strana te točke. Treba uočiti da je na mjestu lokalnog ekstrema vrijednost $\dfrac{dy}{dx}$ jednaka 0. Kako čitalac ne bi pomislio da vrijedi obrat, tj. ako vrijedi $\dfrac{dy}{dx} = 0$, da funkcija tada ima lokalni ekstrem, dao nam je primjer krivulje s infleksijom. Na slici 6. vidi se da je vrijednost $\dfrac{dy}{dx}$ uvijek pozitivna, no prvo se smanjuje i u jednoj točki postiže minimalnu vrijednost, a zatim se $\dfrac{dy}{dx}$ dalje opet povećava. Može se dogoditi da takva krivulja ima najmanji nagib 0, a da u toj točki nije lokalni ekstrem.



Slika 6.

Zatim slijede poglavlja posvećena minimumu i maksimumu, te izračunavanju derivacija eksponencijalne i logaritamske funkcije.

Interesantan je i način kojim se uvodi derivacija funkcije e^x.

Autor promatra niz $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ kada n teži u beskonačno. Tablično su prikazane izračunavane vrijednosti za $n = 2, 5, 10$, itd.

$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2$	$= 2.25$
$\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^5$	$= 2.489$
$\left(1+\dfrac{1}{10}\right)^{10}$	$= 2.594$
$\left(1+\dfrac{1}{20}\right)^{20}$	$= 2.653$
$\left(1+\dfrac{1}{100}\right)^{100}$	$= 2.705$
$\left(1+\dfrac{1}{1000}\right)^{1000}$	$= 2.7169$
$\left(1+\dfrac{1}{10000}\right)^{10000}$	$= 2.7181$

Međutim, vrijednost se ovog izraza može računati i na drugi način, korištenjem binomnog poučka:

$$(a+b)^n = a^n + n\frac{a^{n-1}b}{1!} + n(n-1)\frac{a^{n-2}b^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{a^{n-3}b^3}{3!} + \cdots.$$

Ako stavimo $a = 1$ i $b = \frac{1}{n}$, dobit ćemo

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \frac{1}{4!}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} + \ldots$$

Ako pretpostavimo da n postaje beskonačno velik, tada će $n-1$, $n-2$, $\ldots$ biti skoro jednaki n, i tada imamo

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots.$$

Uzimajući po volji mnogo članova ovog brzo konvergirajućeg reda, možemo izračunati vrijednost broja e do željene točnosti.

Nadalje nas zanima vrijednost za $e^x = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$.

$$e^x = 1^{nx} + nx\frac{1^{nx-1}\left(\frac{1}{n}\right)}{1!} + nx(nx-1)\frac{1^{nx-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2!} + nx(nx-1)(nx-2)\frac{1^{nx-3}\left(\frac{1}{n}\right)^3}{3!} + \ldots$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n^2x^2 - nx}{n^2} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{n^3x^3 - 3n^2x^2 + 2nx}{n^3} + \ldots$$

Kada n postaje beskonačno velik, ovaj izraz se pojednostavnjuje i vrijedi:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

Što se događa kada ga deriviramo?

$$\frac{d(e^x)}{dx} = 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \frac{5x^4}{5!} + \ldots$$

ili

$$\frac{d(e^x)}{dx} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots,$$

što je potpuno jednako početnom nizu. Tako zaključujemo da je $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$.

Nakon poglavlja o deriviranju trigonometrijskih funkcija te o parcijalnim derivacijama, dolazimo do integrala.

"Misteriozan" znak $\int$ autor jednostavno čita kao "zbroj od". Međutim, postoji razlika između grčkog simbola $\sum$ i znaka $\int$. Dok se $\sum$ koristi za označavanje zbroja konačno velikih veličina, dotle se znak $\int$ koristi za označavanje sume beskonačno malih veličina, elementarnih dijelova koji će dati cjelinu. Tako je $\int dx = x$, a $\int dy = y$. Cjelinu možemo zamisliti kao sačinjenu od malih dijelova – što su dijelovi manji, više ih ima. Uzmemo li dijelove kao zanemarivo malene ili beskonačno malene, tada je cjelina sastavljena od beskonačnog broja takvih beskonačno malih dijelova (dx ili dy). Ali zašto razmišljati na ovaj način? Zašto jednostavno ne misliti u terminima cjeline, a ne uzimati elemente ili dijelove cjeline?

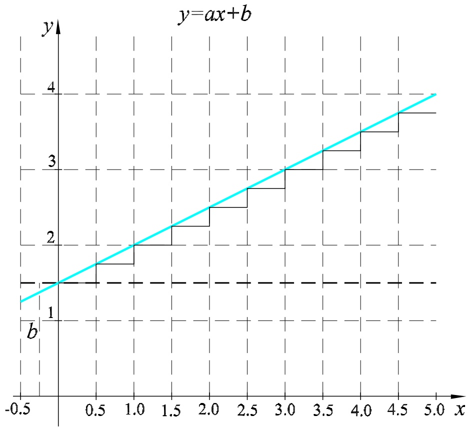
Jednostavno zato što postoji velik broj procesa u kojima se tražena veličina ne može izračunati bez izračunavanja sume mnoštva malih dijelova.

Nagib krivulja

Vidjeli smo da deriviranjem krivulje nalazimo izraz za vrijednost nagiba (u različitim točkama). Možemo li napraviti inverzan proces tako da rekonstruiramo cijelu krivulju ako nam je poznat nagib?

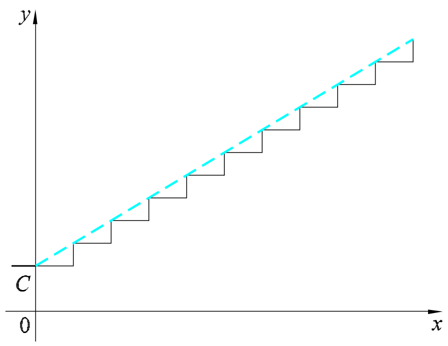
Kako bismo, primjerice, odredili pravac ako je zadan njegov nagib?

$$y = ax + b$$



Slika 8.

Nagib je pravca $a = \frac{dy}{dx}$. Pravac ima konstantan nagib a. Uzduž cijelog pravca za sve elementarne trokute omjer $\frac{dy}{dx}$ uvijek je jednak. Pretpostavimo da želimo rekonstruirati krivulju samo iz činjenice da znamo kako je $\frac{dy}{dx} = a$. Uzmimo elementarne trokute jednakih nagiba i složimo ih skupa jedan do drugog kao na slici



Slika 9.

Uzmemo li dx-e i dy-e po volji malima, elementarni su trokuti još uvijek sukladni i moći ćemo izračunati y kao zbroj svih dy-a i x kao zbroj svih dx-a. Ali ne znamo gdje ćemo početi crtati pravac; u ishodištu ili možda iznad? Jedina informacija koju imamo je nagib, a ne i na kojoj je on visini iznad (ispod) ishodišta. Sjecište pravca s osi y zapravo je neodređeno. Možemo početi crtati na nekoj visini C iznad ishodišta. Vidimo da je jednadžba pravca

$$y = ax + C,$$

gdje je konstanta C posebna vrijednost koju poprima y kada je $x = 0$.

Promatrajmo složeniju krivulju koja nema konstantan nagib, nego raste razmjerno s x, npr. $\frac{dy}{dx} = ax$, uzmimo da je, npr. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}x$.

Kada je

$$x = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0,$$

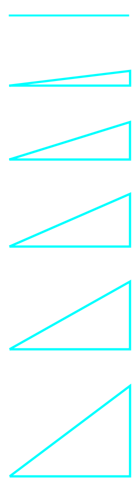
$$x = 1, \quad \frac{dy}{dx} = 0.2,$$

$$x = 2, \quad \frac{dy}{dx} = 0.4,$$

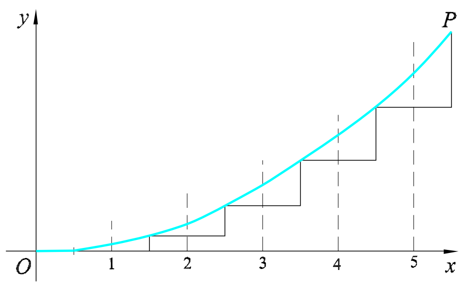
$$x = 3, \quad \frac{dy}{dx} = 0.6,$$

$$x = 4, \quad \frac{dy}{dx} = 0.8,$$

$$x = 5, \quad \frac{dy}{dx} = 1.0,$$



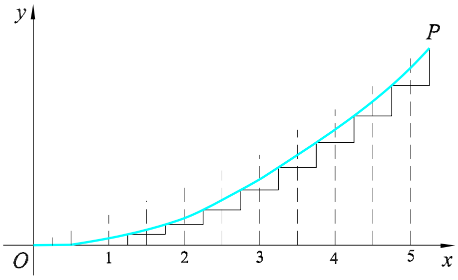
Ako opet složimo elementarne trokute zajedno, kao u prethodnom primjeru, dobit ćemo ne posve glatku krivulju (ali njenu aproksimaciju), kao na slici 10:



Slika 10.

Ako smanjujemo elementarne dijelove (trokute), dobit ćemo bolju aproksimaciju (vidi sliku 11).

Kako bismo konstruirali idealnu krivulju, trebalo bi uzeti beskonačno malene dx i odgovarajuće dy i trebalo bi ih uzeti beskonačno mnogo!



Slika 11.

Tada bi u svakoj točki krivulje vrijednost y bila jednaka zbroju svih dy-a, tj. $\int dy = y$. Kako je svaki dy jednak $\frac{1}{5}x \cdot dx$, možemo pisati $y = \int \frac{1}{5}x \cdot dx$.

Da je x konstantan, tada bi $\int \frac{1}{5}x \cdot dx$ bio jednak kao i $\frac{1}{5}x \int dx$ ili $\frac{1}{5}x^2$. No kako x raste od 0 do svoje stvarne vrijednosti x u točki P, njegova je srednja vrijednost $\frac{1}{2}x$ pa je $y = \int \frac{1}{5}x \cdot dx = \frac{1}{10}x^2$, tj. $y = \frac{1}{10}x^2$. Kao i u prethodnom slučaju, ova metoda zahtijeva pribrajanje neodređene konstante C, jer nam nije poznato na kojoj visini iznad (ili ispod) ishodišta treba započeti za $x = 0$.

Ovaj me zorni pristup integriranju oduševio jer nikada prije nisam susrela takav opipljivi pristup problemu integriranja. Naravno, na ovo se nadalje nadovezuje standardni pristup integriranju kao operaciji koja je inverzna deriviranju, obrađuju se sva svojstva i pravila integriranja, te problem određivanja površine i duljine luka krivulje.

Nikada nisam tako zorno mogla predočiti i materijalizirati pojam integrala kao nakon čitanja ove knjige. Na ovom ću mjestu prekinuti jer možda nekom od čitatelja MŠ-a ipak dopadne u ruke ova knjiga. Zato im ne želim unaprijed otkriti sve draži koje ona skriva.

SILVANUS PHILLIPS THOMPSON *je rođen u Yorku 1851. godine, a umro u Londonu 1916. Bio je uvaženi engleski fizičar u području elektriciteta, akustike i magnetizma.*

Napisao je čitav niz udžbenika, a knjiga "Elementarne lekcije iz elektriciteta i magnetizma" doživjela je četrdesetak izdanja. Bio je član Kraljevskog društva, imao je veliki ugled u svijetu znanosti i dobitnik je mnogih uglednih britanskih i svjetskih nagrada.