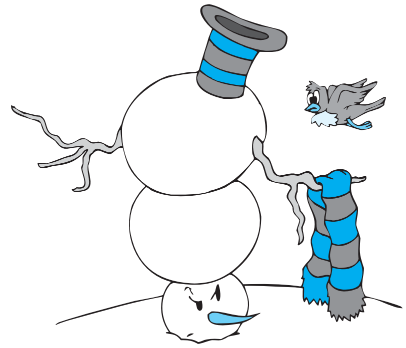
Opseg i površina “snježne pahuljice”

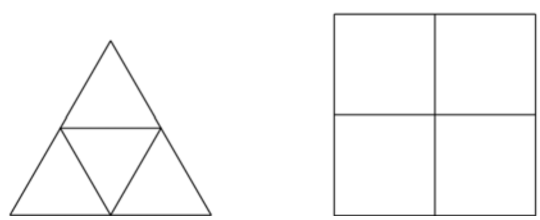


Renata Sotirov i Vedran Taslidžić, Osijek

Uvod

Pojam *fraktala* uveo je Benoit Mandelbrot 1970. godine, o čemu je MFL već publicirao nekoliko članaka (vidi [1]). Fraktal ima svojstvo da svaki njegov dio sadrži istu strukturu kao i cijeli objekt. Naime, pogledamo li uvećanu sliku dijela fraktala između bilo koje dvije njegove točke, ona će biti identična izgledu samog fraktala, bez obzira koliko bilo uvećanje. Ovo svojstvo fraktala nazivamo “*samosličnost*” ili “*unutarnja sličnost*” (engl. self–similarity). Očito je promatranje fraktalnih objekata u stvarnosti aproksimacija prethodno navedenog idealnog stanja, jer se u nekom koraku iteracije neizbježno gube detalji. Drugi pojam koji se veže uz fraktale je *fraktalna dimenzija* ili *Hausdorffova dimenzija*. Naime, znamo da u euklidskoj geometriji točka ima dimenziju nula, a pravac dimenziju jedan, dok su ravninski likovi dvodimenzionalni, a geometrijska tijela u prostoru trodimenzionalna. Fraktali također imaju dimenziju, ali njihova dimenzija *ne* mora biti cijeli broj. Pri definiranju fraktalne dimenzije koristi se svojstvo “unutarnje sličnosti” fraktala.

Pogledajmo najprije kvadrat sa stranicom 1 i jednakostranični trokut sa stranicom 1. Podijelimo li svaku stranicu naših euklidskih objekata na dva jednaka dijela i spojimo ta polovišta, dobijemo unutar trokuta četiri manja trokuta, a unutar četverokuta četiri manja četverokuta, sa stranicama jednakim polovini stranica polaznih objekata (sl. 1).



Sl. 1.

Podijelimo li stranice trokuta i četverokuta na tri jednaka dijela, dobijemo 9 umanjenih kopija. Dakle, veza između broja kopija N i duljine stranice umanjene kopije f dana je formulom:

$$N = \left(\frac{1}{f}\right)^2 .$$

Slično možemo učiniti i s kockom brida 1. Naime, podijelimo li svaki brid na dva jednaka dijela, dobijemo 8 manjih kocaka, a podijelimo li svaki brid na tri jednaka dijela, dobijemo 27 umanjenih kopija. Dakle, u ovom slučaju veza između broja kopija N i duljine stranice umanjene kopije f dana je s

$$N = \left(\frac{1}{f}\right)^3.$$

Očito, ako se objekt može podijeliti na N svojih umanjenih kopija koje imaju duljinu stranice f, tada vrijedi:

$$N = \left(\frac{1}{f}\right)^D,$$

gdje je D dimenzija objekta.

Iz prethodne jednadžbe slijedi:

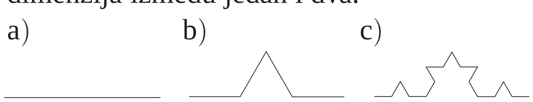
$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{f}}. \qquad (1)$$

Ovo nas motivira da i dimenziju fraktalnog objekta definiramo formulom (1).

Neki od poznatijih fraktala su: Cantorov skup, Kochova krivulja, Peanova krivulja i trokut Sierpinskog. Fraktali se također javljaju u procesima u prirodi, kao što je razvoj grana i listova na biljkama, prijelaz tvari iz tekuće u kristalnu fazu, rast koralja na morskom dnu.

Kochova krivulja

Mi ćemo promatrati fraktalni objekt, poznat kao Kochova[1] krivulja, za koju se prvi puta čulo još 1904. godine, a čija je fraktalna dimenzija između jedan i dva.



Sl. 2.

Kochova krivulja je fraktalni objekt, koji se definira iterativno na sljedeći način:

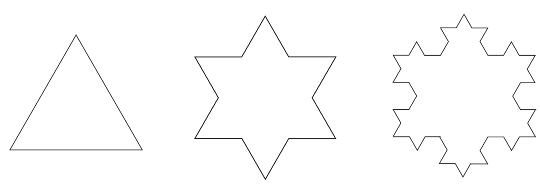
- za $n = 1$ to je dužina duljine 1 (sl. 2. a));
- za $n = 2$ geometrijski lik nastaje tako da dužinu podijelimo na tri jednaka dijela, te srednji dio koji obrišemo zamijenimo s dvije dužine duljine $\frac{1}{3}$, kao što je prikazano na slici 2. b);
- na sličan način konstruiran je geometrijski lik na slici 2. c).

Ponavljajući navedeni postupak dobivamo niz geometrijskih objekata $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$. Za $n \to \infty$ dobivamo tzv. Kochovu krivulju. Kod drugog iterativnog koraka u procesu nastanka Kochove krivulje, dobijemo 4 dužine duljine $\frac{1}{3}$. Dakle, fraktalna dimenzija je

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2619.$$

Ova krivulja ima još jedno zanimljivo svojstvo, a to je da se ni u jednoj njezinoj točki ne može povući tangenta.

Ako tri Kochove krivulje potječu od tri strane jednakostraničnog trokuta, tada one tvore zatvorenu krivulju koju nazivamo "*krivulja snježne pahuljice*[2]" (sl. 3). U nastavku izračunat ćemo opseg i površinu "snježne pahuljice".



Sl. 3.

[1] Švedski matematičar Helge von Koch (1870. – 1924.)
[2] engl. snowflake curve, njem. Schneeflockenkurve

Opseg "snježne pahuljice"

Izračunat ćemo opseg fraktalnog geometrijskog objekta koji nastaje iterativnim postupkom opisanim u prethodnom poglavlju i slikom 3. Bitno je shvatiti da neprestanim nanošenjem jednakostraničnih trokuta, od jedne stranice nastaju 4 stranice od kojih je svaka tri puta kraća od stranice iz prethodne iteracije (sl. 2.). Dakle, opseg početnog geometrijskog objekta (jednakostranični trokut sa stranicom 1) je $O_1 = 3 \cdot 1$. Drugi geometrijski objekt ima $3 \cdot 4$ stranica duljine $\frac{1}{3}$. Dakle, $O_2 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3}$. Treći objekt ima $3 \cdot 4 \cdot 4$ stranica duljine $\frac{1}{3^2}$. Dakle, $O_3 = 3 \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{3^2}$. Zato, općenito vrijedi:

$$O_n = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} = 3\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

Niz $O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$ je divergentan jer je to geometrijski niz s kvocijentom $q = \frac{4}{3} > 1$. To znači da opseg geometrijskih objekata $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ neograničeno raste kada $n \to \infty$. Dakle, Kochova krivulja je krivulja beskonačnog opsega.

Da li i površine objekata $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ također neograničeno rastu kada $n \to \infty$?

Površina "snježne pahuljice"

Površina početnog geometrijskog objekta (jednakostraničnog trokuta sa stranicom $a = 1$) je

$$P_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}. \tag{2}$$

Površina drugog objekta dobije se tako da početnu površinu P_1 uvećamo za površinu 3 jednakostranična trokuta sa stranicom $a = \frac{1}{3}$, tj.

$$P_2 = P_1 + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}. \tag{3}$$

Površina trećeg objekta dobije se tako da prethodnu površinu P_2 uvećamo za površinu $3 \cdot 4$ jednakostraničnih trokuta sa stranicom $a = \frac{1}{3^2}$, tj.

$$P_3 = P_2 + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}. \tag{4}$$

Općenito

$$P_n = P_{n-1} + 3 \cdot 4^{n-2} \cdot \frac{1}{9^{n-1}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}. \tag{5}$$

Zbrajajući svih n jednakosti (2)–(5), dobivamo

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{k=1}^{n-1} 4^{k-1} \frac{1}{9^k} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^k. \end{aligned}$$

Kako je

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{4}{5}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right],$$

površina n-tog geometrijskog objekta je

$$P_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]. \tag{6}$$

Niz (P_n) je konvergentan i ima limes

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Dakle, površine objekata $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ konvergiraju prema broju $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ kada $n \to \infty$. Prema tome, "snježna pahuljica" je zatvorena krivulja koja zatvara konačnu površinu.