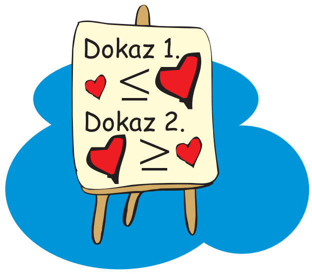


Dva razna dokaza jedne analitičke nejednakosti

Šefket Arslanagić, Sarajevo

U ovom članku dati ćemo dva razna dokaza jedne analitičke nejednakosti i to jedan algebarski, a jedan čisto geometrijski. Riječ je o sljedećoj nejednakosti:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2} \geq \sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2} + \sqrt{(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}, \tag{1}$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ proizvoljni realni pozitivni brojevi.

Evo tih dokaza:

Dokaz 1. Najprije ćemo dokazati jednu pomoćnu nejednakost koja glasi

$$\sqrt{a_i^2+b_i^2}\cdot\sqrt{a_j^2+b_j^2} \geq a_ia_j+b_ib_j, \tag{2}$$

gdje su $i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j$.

Polazeći od očigledne nejednakosti

$$(a_ib_j-a_jb_i)^2 \geq 0,$$

dobijamo nakon kvadriranja

$$a_i^2b_j^2-2a_ia_jb_ib_j+a_j^2b_i^2 \geq 0,$$

odnosno

$$(a_i^2+b_i^2)(a_j^2+b_j^2) \geq a_i^2a_j^2+b_i^2b_j^2+2a_ia_jb_ib_j,$$

tj.

$$(a_i^2+b_i^2)(a_j^2+b_j^2) \geq (a_ia_j+b_ib_j)^2$$

te nakon korjenovanja

$$\sqrt{a_i^2+b_i^2}\cdot\sqrt{a_j^2+b_j^2} \geq a_ia_j+b_ib_j.$$

Ovim je nejednakost (2) dokazana. Vrijedi jednakost *u* (2) u slučaju kada je

$$a_ib_j-a_jb_i=0, \quad \text{tj.}$$

$$\frac{a_i}{a_j}=\frac{b_i}{b_j}; \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n, i \neq j).$$

Prijeđimo sada na dokaz date nejednakosti (1). Stavljajući u nejednakost (2) da je $i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j$, dobijamo redom nejednakosti

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geq a_1a_2+b_1b_2,$$

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_3^2+b_3^2} \geq a_1a_3+b_1b_3,$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{a_{n-1}^2+b_{n-1}^2}\cdot\sqrt{a_n^2+b_n^2} \geq a_{n-1}a_n+b_{n-1}b_n.$$

Nakon zbrajanja ovih nejednakosti, dobijamo sljedeću nejednakost

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_3^2+b_3^2}$$
$$+\ldots+\sqrt{a_{n-1}^2+b_{n-1}^2}\cdot\sqrt{a_n^2+a_n^2}$$
$$\geq a_1a_2+b_1b_2+a_1a_3+b_1b_3$$
$$+\ldots+a_{n-1}a_n+b_{n-1}b_n,$$

a odavde

$$a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+\ldots+a_n^2+b_n^2$$
$$+2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}$$
$$+2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_3^2+b_3^2}$$
$$+\ldots+2\sqrt{a_{n-1}^2+b_{n-1}^2}\cdot\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$
$$\geq a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3$$
$$+\ldots+2a_{n-1}a_n+b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2$$
$$+2b_1b_2+2b_1b_3+\ldots+2b_{n-1}b_n,$$

odnosno

$$(\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2})^2$$
$$\geq(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2,$$

te nakon korjenovanja

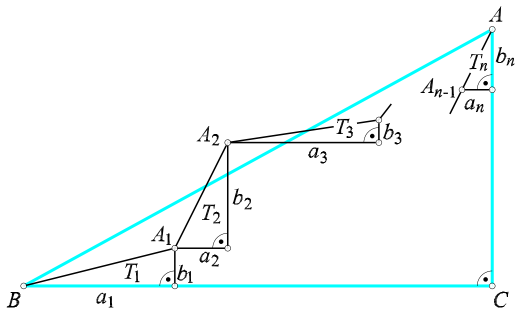
$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$
$$\geq\sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2},$$

što je trebalo dokazati.

Vrijedi jednakost u (1) ako i samo ako je

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Dokaz 2. Za bilo koja dva pozitivna broja x i y, broj $\sqrt{x^2+y^2}$ može se smatrati kao duljina hipotenuze pravokutnog trokuta čije katete imaju duljine x i y. Brojeve $\sqrt{a_1^2+b_1^2}$, $\sqrt{a_2^2+b_2^2}$, $\ldots$, $\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ ćemo ilustrirati donjom slikom:



Na slici pravokutni trokuti T_i $(i=1,2,\ldots,n)$ imaju stranice a_i paralelne sa a_1, a stranice b_i paralelne sa b_1 ako je $i=2,3,\ldots,n$. Hipotenuze trokuta T_i formiraju poligonalnu liniju

$$p=BA_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A.$$

Imamo da je

$$p=\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

Produžavanjem stranica a_1 i b_n dobija se pravokutni trokut $\triangle ABC$ čije su stranice:

$$\overline{BC}=a_1+a_2+\ldots+a_n;\overline{CA}=b_1+b_2+\ldots+b_n,$$

te zbog $|BA|^2=|BC|^2+|CA|^2$ (Pitagorin teorem):

$$|BA|=\sqrt{(a_1+a_2+\ldots a_n)^2+(v_1+b_2+\ldots+b_n)^2}.$$

Jasno je da je $p\geq|BA|$, pa imamo

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$
$$\geq\sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2},$$

tj. nejednakost (1) je točna.

Jednakost u (1) važi ako i samo ako vrhovi A_1, A_2, $\ldots$, A_{n-1} pripadaju hipotenuzi $\overline{BA}$. U tom slučaju trokuti $T_i (i=1,2,\ldots,n)$ su slični pa su njihove odgovarajuće stranice proporcionalne.

Drugim riječima važi

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$
$$=\sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}$$

ako i samo ako je

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$