Tehniko pomozi, opet ti grafovi!

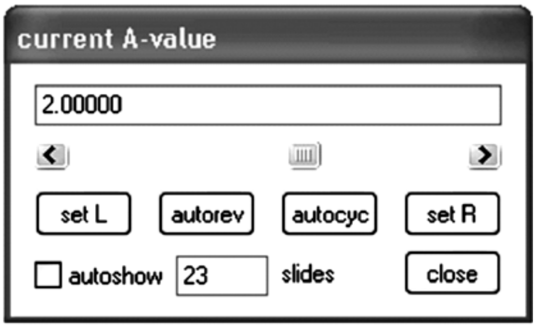
Šime Šuljić, Pazin

"Ničega previše" bijaše geslo starih Grka. Načelu da svemu treba naći pravu mjeru pokoravali su se i veliki matematičari starog vijeka. U današnje vrijeme, kada se pretjeruje svim i svačim i kada smo uvučeni u logiku konzumiranja uvijek novog i novog te odbacivanja starog bez obzira na stvarnu potrebu i kvalitetu, ideal umjerenosti teško nam je razumljiv. Naivno bi bilo očekivati da će logika sveopćeg pretjerivanja i prenaglašavanja zahvaćati samo modne trendove i industriju zabave, ali ne i obrazovanje. I obrazovanju će se nametati mnoge novotarije, uvijek se predstavljajući kao imperativ trenutka. Ne budemo li mi imali mjeru u primjeni novih intencija, vrijeme će već učiniti svoje u svođenju na pravu mjeru. I u nastavi matematike proteklih desetljeća možemo prepoznati nastojanja koja su ostavila puno manje tragova i zadržala se puno kraće nego što se to očekivalo na početku. Trenutno je udarna vijest informatizacija cjelokupnog obrazovnog procesa. I ona ga već zahvaća, uz oduševljenje mnogih pobornika, a istovremeno šireći bojazan i strepnju kod drugih. I video oprema je najavljivana kao revolucija u nastavi, pa ni približno nije ostvarila predviđanja. Hoće li ista sudbina zadesiti i računalo? Zasigurno ne, ali će naći skromniju ulogu od nekih ambicioznih predviđanja. Baš zbog toga da ničega ne bude previše, kanio sam u ovim napisima malo manje pažnje posvećivati računalu i svemu onome što se oko njega vrti. Ali eto, vapaj za računalnom tehnikom upućen s više strana vratio me stalnim temama.

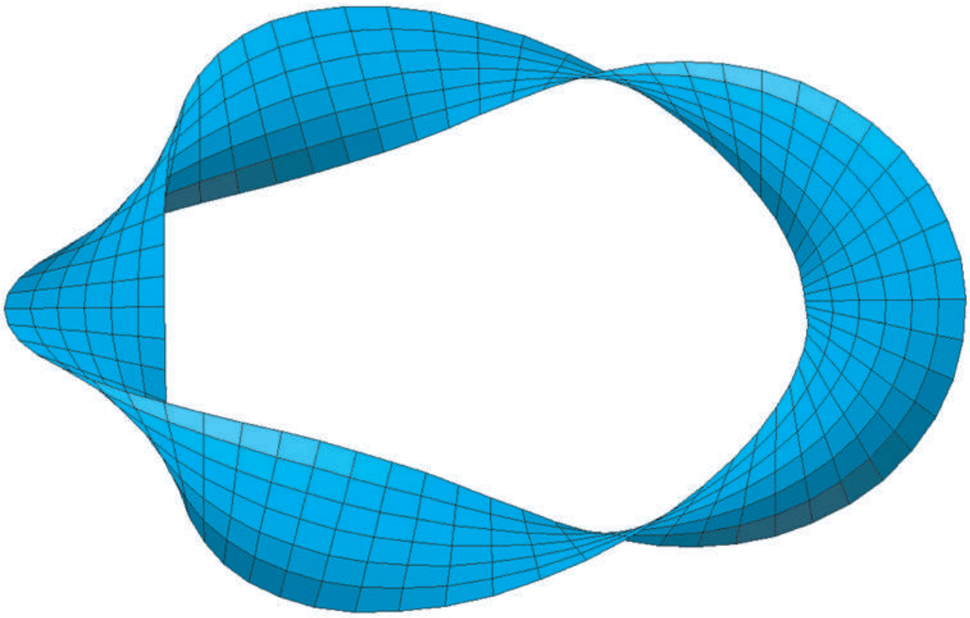
U vrlo zanimljivom članku "*Möbiusova traka*" 22. broja MŠ-a, Sandra Gračan piše: *"Parametarske jednadžbe Möbiusove trake debljine d=0, širine 2p i savijene u krug radijusa R, glase ovako:*

$$x = \left[R + u\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\right]\cos t$$
$$y = \left[R + u\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\right]\sin t$$
$$z = u\sin\left(\frac{1}{2}t\right),$$

gdje je $u \in [-p, p]$ it $\in [0, 2\pi)$. Pitam se, pitam: može li se u Sketchpadu napraviti animacija? Pozivam sve **Sketchpadoljubce** *da pokušaju!"* Shvatih ovaj poziv kao izravni prijedlog na uključenje. Prvo što mi je palo na pamet je čemu uopće posezati za računalom nakon svih onih opisa prave, opipljive trodimenzionalne izvedbe od papira, koju još mogu pratiti svi oni trikovi s rezanjem traka uzduž. S papirnatim trakama možemo nastupiti kao mađioničari, a da u svemu nisu nikakvi trikovi, nego živa matematika. Ipak, razumljivo je da mi rado posežemo za dvodimenzionalnom predodžbom stvari i pojava, jer ih želimo prikazati na papiru ili dinamično na zaslonu računala. Ako k tome imamo i parametarske jednadžbe nekog oblika u prostoru, tko od matematičara ne bi volio pomoću njih predočiti zadani oblik. Pogotovo ako nam je na raspolaganju računalo na kojem s lakoćom mijenjamo pojedine parametre u jednadžbi i promatramo promjene. Ali na žalost, program *The Geometer's Sketchpad* nije program koji može prihvatiti bilo koju jednadžbu koordinatnog sustava u prostoru. *Sketchpad* može prikazati grafove eksplicitno zadanih funkcija pravokutnog ili polarnog koordinatnog sustavu u ravnini. Jasno je da će trebati posegnuti za nekim drugim specijaliziranim matematičkim softverom. Izbor je velik. Od pravog mnoštva raznih crtača grafova funkcija do vrhunskih alata poput *Mathematice*. Želimo li da prosječni čitatelj MŠ-a "zavrti" Möbiusovu traku na svom računalu, bez velikog učenja i dodatnih troškova moja je preporuka preuzimanje besplatnog programa *Winplot* (`http://math.exeter.edu/rparris`) matematičara Richarda Parrisa s američkog Phillips Exeter Academy. Program nije najsavršeniji na području grafike i nema najspretnije riješeno sučelje, ali će nam, kao onima kojima prije svega treba matematika, biti od velike koristi za ono što sada želimo riješiti, a može koristiti i ubuduće za svakodnevne zadatke. Uz malo sreće brzo možemo doći do prikaza Möbiusove trake upisom danih para-



metarskih jednadžbi u 3D prozor programa. Za radijus uzmimo recimo vrijednost 2, a parametar u, odnosno širinu trake od -0.3 do 0.3. No, time nismo iskoristili računalni program na najbolji način. Ovaj računalni program je dinamičan i bit će bolje da umjesto konkretne



vrijednosti radijusa R i koeficijenta $\frac{1}{2}$ u jednadžbama upišemo opće brojeve (slova) R i a. Zatim, naredbom *Anim* aktiviramo takozvane klizače koji animiraju sliku. Pred našim se očima Möbiusova traka širi i steže, višestruko kovrča i raspetljava. Na slici je trenutak kada je vrijednost koeficijenta $a = 2$.

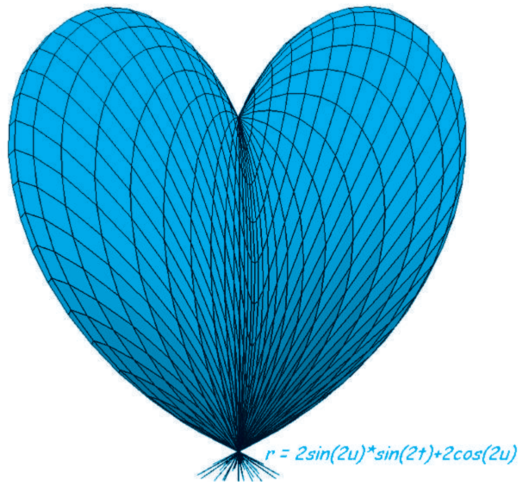
Nije mi namjera ovdje opisivati sam program, pogotovo ne njegov trodimenzionalni prikaz, koji nam u praksi rjeđe treba. Dovoljno je spomenuti samo neke njegove mogućnosti prikaza grafova funkcija i krivulja, te raznih izračuna u koordinatnom sustavu u ravnini. Program prikazuje grafove funkcija zadanih eksplicitno, implicitno, parametarski i u polarnim koordinatama, crta točke i dužine, rekurzivno zadane relacije i nizove; sjenča područja iznad, ispod i između dvaju grafova; daje tablicu vrijednost i funkcije za niz zadanih vrijednosti argumenta; izračunava i crta nultočke funkcije i ekstremne vrijednosti; "šeta" tangentu i sekantu po krivulji; određuje duljine lukova i površine što ih graf funkcije zatvara s apscisom ili grafom druge funkcije; crta pravokutnike ispod ili iznad grafa funkcije i izračunava njihovu površinu prikazuje tijelo koje bi nastalo rotacijom oko zadanog pravca, a izračunava i njegov volumen i površinu; crta derivacije zadane funkcije i familiju grafova s obzirom na neki promjenljivi koeficijent jednadžbe određuje sjecišta grafova dviju funkcija, ali može zbrajati, oduzimati, množiti, dijeliti, potencirati i stvarati kompoziciju dviju funkcija, odnosno prikazivati njihove grafove. Jednom riječju, program može mnogo toga što nam je često potrebno. Za brzinsku provjeru rješenja neke jednadžbe ili prikaza grafa neke funkcije ovo je idealan program, za koji se ne moramo posebno obučavati.

Kao što već rekoh u samom uvodu, vapaj za računalnom tehnikom stigao je s više strana. Iz razgovora i izmjene materijala okupljenih nastavnika matematike na sve popularnijoj diskusijskoj grupi nastavnika matematike (`http://groups.yahoo.com/group/nastava-matematike`), vidljivo je da se sve više poseže za računalom i LCD projektorom u nastavi matematike. Slaba strana prezentacija, inače kvalitetnih u sadržajnom i metodičkom smislu, bili su upravo grafovi funkcija. Ne samo da su po svom izgledu bili ispod razine dizajna koji nam omogućuje suvremena tehnika, nego su često u matematičkom smislu bili netočni ili barem neprecizni. U ovoj situaciji možemo posegnuti za programom *The Geometer's Sketchpad*. On "jak" je na području crtanja grafova eksplicitno zadanih funkcija. Činjenica je, međutim, da taj komercijalni program mnogim kolegama nije dostupan, pa se *Winplot* nameće kao jednostavno rješenje. Na sljedećoj slici može se steći dojam kako mogu izgledati prikazi grafova funkcije sinus u *Winplotu*. Izgled tih grafova na zaslonu računala, na projekciji s LCD-om ili jednostavnom ispisu na pisaču u boji puno je ljepši od grafičkog prikaza na ovim stranicama. Ono što je važnije jest da je prikazujući graf u *Winplotu* dinamičan, a ne statičan. Dakle, uopće ne moramo prikazivati tri grafa, već se graf $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ lako transformira u sva tri. S obzirom da dinamičnu sliku možemo imati samo u specijaliziranom matematičkom softveru, opravdano je postaviti pitanje treba li gotove slike uopće "prelijepiti" u neki drugi prezentacijski alat (*PowerPoint)* i time se vratiti statičkom prikazu poput onog u knjizi. Nije li bolje da se pred učenikovim očima matematički sadržaji otkrivaju u svom najljepšem izdanju uz živu riječ nastavnika?

Time što se nametnula potreba da sebi ili učenicima predočimo grafove na zaslonu računala ili projekcijskom platnu, nije prestala potreba za ispisom grafova na papir. Dapače, u doba lake dostupnosti računala i pisača svi bismo htjeli ostaviti šarenog traga na školskom panou, nastavnim materijalima, pismenim ispitima, člancima, knjigama... Svjesni smo da je ljudsko oko danas razmaženo na ugodan dizajn svakojakih prikaza i oblika.

Povrh toga zahtijevamo od matematičkih objekata savršenu točnost prikaza. Početkom ove školske godine u izdanju *Profila* izašle su zbirke tzv. višeminutnih ispita znanja za srednje škole. Za takvim je materijalom postojala velika potreba, a autori su ponudili velik izbor vrlo kvalitetnih testova. Pun pogodak. Samo da nam tehnička oprema knjiga nije podvalila očajno loše grafove funkcija u rješenjima zadataka. I nama, i autorima i samim grafovima. Sinusoida sa dva vrha! Pa to je zov upomoć toga grafa.

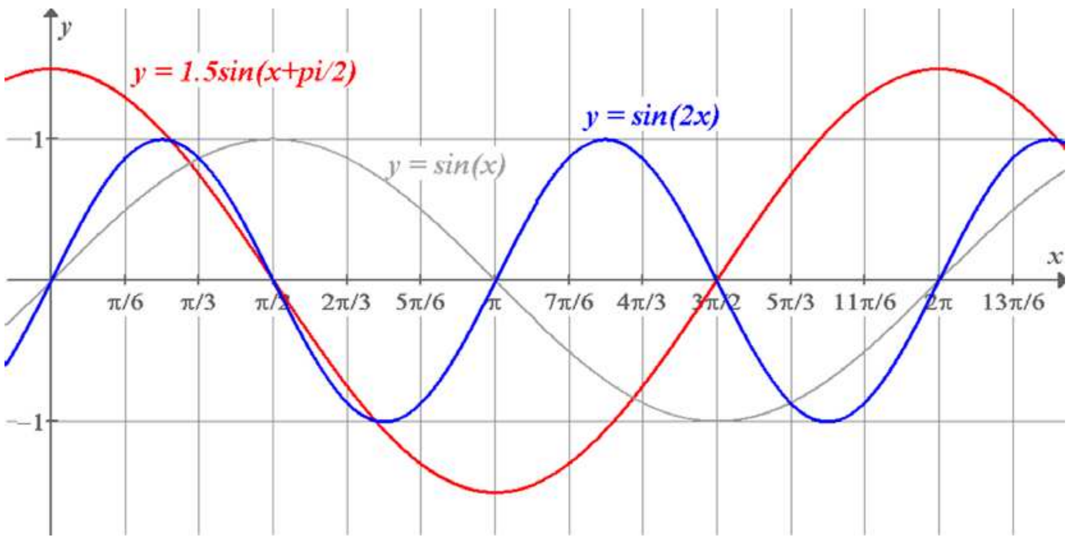
Htio sam ukazati na to da postoji jednostavno i besplatno rješenje narasle potrebe za prikazom grafova uz pomoć računala. Računalni program *Winplot* nije jedino rješenje. Postoje i mnogi drugi isto tako besplatni programi, a među komercijalnim programima ima i puno kvalitetnijih. I na kraju vratimo se starogrčkom idealu osjećaja za mjeru; ne pretjerujmo s tehnikom. Kako samo grafovi trigonometrijskih funkcija mogu lijepo izgledati nacrtani kredom u boji na ploči! Grafovi crtani rukom na papir mogu imati veću draž nego oni rađeni strojno. Ni osjećaj koji se pri crtanju razvija nije zanemariv. S druge strane, sukladno vremenu, postoji i potreba za strojnim prikazom i ispisom. Sretno u odvagivanju prave mjere!



Prigodno: iz Winplota povodom Valentinova.

Izdvojeno

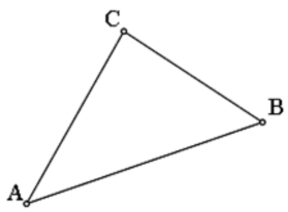
Vratimo se neodoljivom izazovu koji je tehnička i grafička urednica MŠ-a, Sandra Gračan stavila pred *Sketchpadoljupce*, dinamičnom prikazu Möbiusove trake u progra-

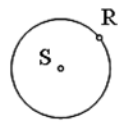


mu *The Geometer's Sketchpad*! Poznate formule za trodimenzionalni koordinatni sustav, kao što rekosmo nisu od nikakve pomoći u ovom programu. U programu se, doduše, korištenjem nacrtne geometrije mogu prikazivati trodimenzionalni geometrijski objekti. Za ovaj objekt, koji bismo mogli opisati našom poznatom uzrečicom da ga "ne možeš uloviti ni za glavu ni za rep", nije mi se upuštalo u takvo rješenje. Ako postoji jednostavnije rješenje, onda se ono zacijelo dobiva konstrukcijskom naredbom *Locus*. Ta je naredba jedan od glavnih aduta ovog programa. Naredba daje odgovor na pitanje što opisuje neki geometrijski objekt (točka, dužina, pravac, kružnica,. . .) kada se točka koja određuje taj objekt giba po nekoj putanji. Vrlo jednostavan, a ilustrativan primjer učinka naredbe *Locus* je konstrukcija po volji mnogo tangenata konika vrlo jednostavnim postupkom. Potrebno je konstruirati simetralu dužine čija se jedna rubna točka nalazi na kružnici. Odabirom te rubne točke na kružnici i simetrale može se aktivirati naredba *Locus*. To praktički znači da pitamo program što nastaje ili što opisuju simetrale dužine kada se rubna točka dužine giba po kružnici. U efektan učinak ovakve konstrukcije lako se može uvjeriti svatko tko ima program ili preuzme njegovu demo inačicu sa stranica (`http://www.keypress.com/sketchpad/sketchdemo.html`). Pomicanjem druge rubne točke dužine u dinamičnom okruženju programa, brzo otkrivamo da je zaista riječ o tangentama konika. Dokaz za tu slutnju već smo dali ranije na stranicama MŠ-a.

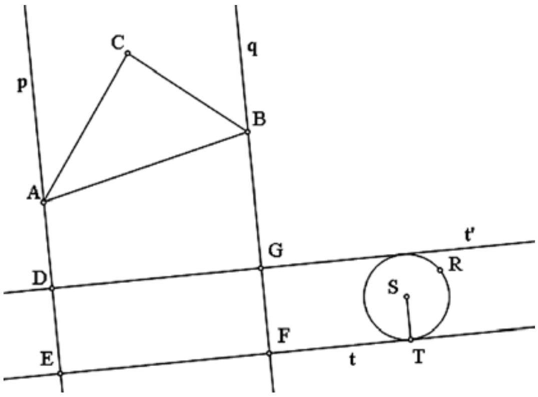
Prikazati neki geometrijski lik uz pomoć naredbe *Locus* nije uvijek jednostavan postupak. Ako znamo definiciju geometrijskog objekta s poznatom frazom "geometrijsko mjesto točaka ravnine", onda smo na dobrom tragu i s malo upornosti doći ćemo do prikaza u programu. Möbiusova traka nije uopće ravninski lik, pa je problem tim veći. Nakon razmišljanja dolazim do zaključka da je u Sketchpadu vjerojatno nemoguće konstruirati Möbiusovu traku, odnosno da nemam dovoljno mašte i vremena za istraživanje. Prije potpunog odustajanja od traženja rješenja postavljenog problema okrenuo sam se Internetu. Danas je, od silnih sadržaja i servisa koje pruža taj medij, gotovo izgubljena ona osnovna misao vodilja koja je pokretala tvorce tog fantastičnog izuma. A ta je osnovna misao da je moguće spojiti interese dvoje ljudi koji se bilo gdje na svijetu, makar u različito vrijeme bave ma kako rijetkim idejama. I zaista, pretražujući Internet naiđoh na rješenje Jen-Ćung Ćuana, profesora na tajvanskom Tsing Hua University. Nad rješenjem sam sa zaprepaštenjem uskliknuo: "Zar u tako malo poteza?". Razmotrimo ih zajedno.

- Nacrtajmo trokut ABC i nezavisno od njega kružnicu sa središtem S i rubnom točkom R.

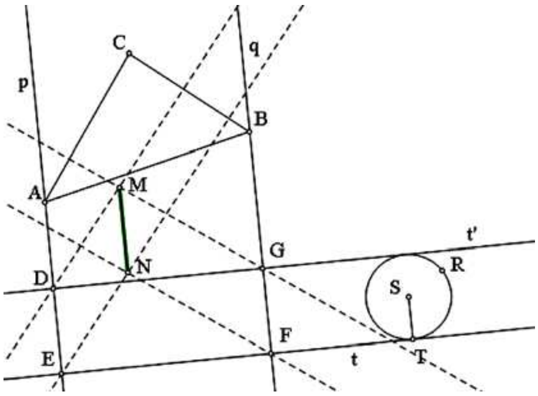




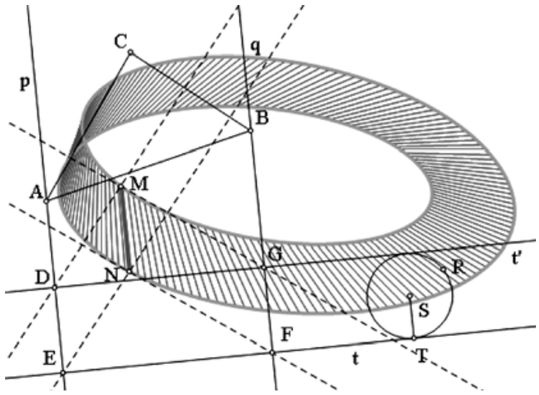
- Konstruirajmo točku T na kružnici, tangentu t kružnice u točki T i njoj paralelnu tangentu t' kružnice. Praktično u Sketchpadu to izvedemo ovako: konstruiramo dužinu ST, okomicu na nju u točki T i zatim rotaciju za 180° oko središta S. Nadalje, konstruirajmo okomicu p na tangentu t iz vrha A i isto tako okomicu q iz vrha B trokuta. Okomice p i q sijeku tangente t i t' u točkama D, E, F i G.



- Iz sjecišta E na tangenti t povucimo okomicu na stranicu BC, a potom iz sjecišta F na tangenti t na stranicu AC trokuta. Neka se te okomice sijeku u točki N. Po istom načelu konstruirajmo okomice iz točaka D i G, koje se sijeku u točki M.



- U programu odaberimo točku T na kružnici i točku M (ili N, svejedno!?) i pokrenimo naredbu *Locus*. Dobivamo rub Möbiusove trake. Isto tako označimo točku T na kružnici i dužinu MN. Klikom na naredbu *Locus* dobivamo samu Möbiusovu traku. Desnim klikom miša na traku možemo u naredbi *Properties-Plot* povećati broj dužina koje prikazuju traku.



Nevjerojatno! Uvjerimo se da je to baš to što smo željeli. Točkom R povećajmo radijus kružnice i širina trake će se proširiti. Pomicanjem vrhova trokuta mijenja se položaj i veličina trake. Gubimo je samo u specijalnim slučajevima, kada točke A, B i C prelaze jedna u drugu, tj. kada se više ne radi o trokutu, ili kada pretjeramo sa širinom trake, ali tada dobivamo vrlo zanimljive slike. Ugodna zabava i razmišljanje!

I Google je nakratko "obukao" fraktalno ruho i time odao počast matematici.