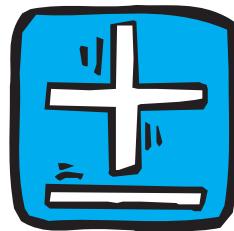


O predznaku broja



Branimir Dakić, Zagreb

Kojeg je predznaka broj $-x$?

Je li broj $-x$ pozitivan ili negativan?

Postavimo li ovo pitanje u razredu, često ćemo dobiti odgovor:

“Taj je broj negativan.”

Je li riječ o brzopletosti, o nerazumijevanju ili...? Bilo kako bilo, ovom se pitanju uvijek moramo vraćati jer je odgovor na njega vrlo značajan.

Postavljeni pitanje “Je li broj $-x$ pozitivan ili negativan?” povlači novo pitanje:

“A kakav je x ? Je li x pozitivan ili negativan? Reci mi kakav je x pa će ti reći kakav je $-x$. ”

Upravo ovo pitanje predznaka broja $-x$ ometa razumijevanje opće definicije funkcije $f(x) = |x|$. U toj definiciji iskazujemo da je ta funkcija uvijek pozitivna (jedina je iznimka nula), te da je $|x| = x$, ako je $x \geq 0$, a $|x| = -x$, za $x < 0$.

Zanimljivo je kako se i inače o pitanjima predznaka broja pomalo čudno i neobičajno razmišlja.

Tako primjerice rješavajući nejednadžbe oblika $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$ zaključujemo:

Količnik dvaju brojeva pozitivan je broj ako su djeljenik i djelitelj brojevi istog predznaka, dakle je

a) $ax + b > 0$ i $cx + d > 0$

ili

b) $ax + b < 0$ i $cx + d < 0$.

To razmatranje primjeni se potom na nekoliko konkretnih primjera. Ali, postavimo li primjerice zadatku da se riješi nejednadžba $\frac{3}{1-x} \leq 0$, nerijetko će učenik slijediti prethodno usvojeno razmišljanje:

Količnik dvaju brojeva negativan je broj ako su djeljenik i djelitelj brojevi suprotnog predznaka, tj.

a) $3 \geq 0$ i $1-x < 0$

ili

b) $3 \leq 0$ i $1-x > 0$.

Čudno, zar ne?

Slično se znade dogoditi i pri rješavanju nejednadžbi kao što su $\frac{2x^2+1}{x^2-4} > 0$ ili $\frac{-x^2-1}{2x-3} < 0$.

Učenik bi morao uočiti kako je broj $2x^2+1$ uvijek pozitivan (ne može biti manji od 1), a broj $-x^2-1$ je uvijek negativan (nije veći od -1).

Pitanje predznaka broja vrlo često se javlja baš uz zadatke vezane s nejednakostima i uz nejednadžbe. Naime, jedno od svojstava nejednakosti jest ono koje govori o množenju nejednakosti brojem. Pa ako nejednakost

množimo s pozitivnim brojem, smisao nejednakosti se ne mijenja, a ako je množimo negativnim brojem, znak nejednakosti se okreće.

Na jednom školskom natjecanju učenika II. razreda postavljen je sljedeći zadatak:

Zadatak. Odredi sve realne brojeve a za koje je nejednakost

$$\frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1} \leq a$$

ispunjena za svaki realni broj x .

Kako je zamišljeno rješenje?

Trebalo bi uočiti da je $x^2 + x + 1 > 0$ za svaki realni broj x te da je stoga dana nejednakost ekvivalentna sa

$$2x^2 + 2x + 3 \leq a(x^2 + x + 1).$$

Odatle se pak dobije nejednakost

$$(a - 2)x^2 + (a - 2)x + a - 3 \geq 0,$$

te se dalje rješavanje svodi na određivanje svih vrijednosti realnog parametra a za koje polinom s lijeve strane prima pozitivne vrijednosti (ili se poništava) za svaki realni broj x .

Iz poznatih uvjeta $a - 2 > 0$ i $D \leq 0$ dobit ćemo $a \geq \frac{10}{9}$.

A kako su zadatak rješavali učenici? Prebacili su a na lijevu stranu, proveli oduzimanje, itd.

Sličan je i sljedeći primjer:

Zadatak. Riješi nejednadžbu:

$$\frac{1 - |x - 2|}{1 + |2 - x|} > \frac{1}{3}.$$

I opet ćemo pomnožiti nejednadžbu pozitivnim brojem $3(1 + |x - 2|)$. Tako dobijemo nejednadžbu

$$3 - 3|x - 2| > |x - 2| + 1,$$

a odatle slijedi $|x - 2| < \frac{1}{2}$, odnosno, $-\frac{1}{2} < x - 2 < \frac{1}{2}$.

Konačno rješenje jest $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$.

Primijetimo samo još kako smo pri rješavanju zadatka koristili još jednu činjenicu vezanu uz ovu temu, a to je da suprotni brojevi imaju jednaku absolutnu vrijednost ($|2 - x| = |x - 2|$).

1 = 2

Sigurno je $1 = \frac{2}{3 - 1}$. No tada je i

$$1 = \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - 1}}, \text{ pa onda i}$$

$$1 = \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - 1}}}.$$

Nastavljajući na jednak način, dobit ćemo

$$1 = \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \dots}}}}.$$

No, također je $2 = \frac{2}{3 - 2}$, odnosno

$$2 = \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - 2}}.$$

$$\text{Dakle je } 2 = \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \dots}}}}.$$

Očigledno, dokazali smo tvrdnju

$$1 = 2.$$