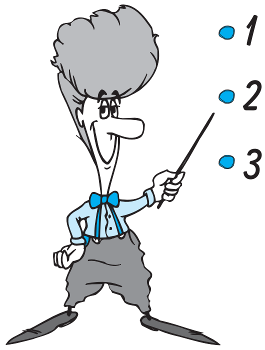
Crtica o matematičkoj indukciji



Petar Vranjković, Zadar

Ovdje neće biti govora o matematičkoj indukciji "ab ovo" (naravno, misleći na konačnu ili finitnu indukciju), drugim riječima nije nam cilj sadržajna strana matematičke indukcije, nego ćemo se ograničiti na njezinu tehničku komponentu. No, to će se odnositi samo na dokaze nekih nejednakosti. Razlog za ovaj prilog dolazi iz same nastavne prakse.

Iako se ponekad može učiniti da je matematička indukcija jednostavna, analiza pokazuje da to ona ipak nije. Zbog toga je dobar broj učenika izbjegava (naravno, kada se ona može primijeniti) čak i onda kada bi ona mogla biti vrlo učinkovita. Razlog je relativno jednostavan. Primjena matematičke indukcije izaziva kod učenika poteškoće, posebno pri dokazu nejednakosti. Te teškoće javljaju se zato što u procesu dokazivanja ne koriste najpogodnije ograničenje, zadano u uvjetu zadatka, a odnosi se na prirodni broj koji figurira u samoj nejednakosti. Mi ćemo tu teškoću savladati na taj način što ćemo zadano ograničenje iskoristiti pri postavljanju (formuliranju) pretpostavke indukcije. Pokazat ćemo to na primjerima.

Primjer 1. Dokaži da je $n^2 > 2n + 1$, $n \geq 5$, $n \in \mathbf{N}$.

Dokaz. Označimo zadanu tvrdnju s $T(n)$.

1° *Baza indukcije* (BI).
Provjerimo istinitost tvrdnje za $n = 5$.

$$5^2 = 25 > 2 \cdot 5 + 1 = 11.$$

Dakle, $T(5)$ je istinito.

2° *Pretpostavka indukcije* (PI).
Neka je za $n = k + 4$, $k \in \mathbf{N}$, $T(k + 4)$ istinito.

$$T(k+4) : (k+4)^2 > 2(k+4) = 2k+9.$$

3° *Korak indukcije* (KI).
Na temelju PI treba dokazati da je za $n = k + 5$, $k \in \mathbf{N}$, $T(k + 5)$ istinito.

$$T(k+5) : (k+5)^2 > 2(k+5)+1 = 2k+11.$$

Sada imamo: $(k+5)^2 = k^2+10k+25 = k^2 + 8k + 16 + (2k + 9) = (k + 4)^2 + 2k + 9 > 2k + 9 + 2k + 9 > 2k + 11$.

Doista je $T(k + 5)$ istinito, pa je time dokaz završen.

Primjer 2. Dokaži da je $2^n > n^2$ za $n \geq 5$, $n \in \mathbf{N}$.

Dokaz.

1° BI.

Za $n = 5$ imamo: $2^5 = 32 > 5^2 = 25$, a to je istina.

2° PI.

Neka je za $n = k + 4$, $k \in \mathbf{N}$, istinita tvrdnja:

$$2^{k+4} > (k+4)^2 = k^2 + 8k + 16.$$

3° KI.

Na temelju PI treba dokazati da je za $n = k + 5$ istinita tvrdnja:

$$2^{k+5} > (k+5)^2 = k^2 + 10k + 25.$$

Sada imamo: $2^{k+5} = 2 \cdot 2^{k+4} > 2(k^2 + 8k + 16) = 2k^2 + 16k + 32 > k^2 + 10k + 25 = (k+5)^2$, jer je $k \in \mathbf{N}$.

Time je dokaz završen.

Primjer 3. Dokaži da je $3^n > 2^n + 3n$, $n \geq 3$, $n \in \mathbf{N}$.

Dokaz.

1° BI.

Za $n = 3$ imamo: $3^3 = 27 > 2^3 + 9 = 17$, a to je istina.

2° PI.

Neka je za $n = k + 2$, $k \in \mathbf{N}$, istinita tvrdnja: $3^{k+2} > 2^{k+2} + 3(k+2) = 2^{k+2} + 3k + 6$.

3° KI.

Na temelju PI treba dokazati da je za $n = k + 3$ istinita tvrdnja:

$$3^{k+3} > 2^{k+3} + 3k + 9.$$

$3^{k+3} = 3 \cdot 3^{k+2} > 3(2^{k+2} + 3k + 6) = 3 \cdot 2^{k+2} + 9k + 18 > 2 \cdot 2^{k+2} + 3k + 9 = 2^{k+3} + 3k + 9$.

Time je dokaz završen.

Primjer 4. Dokaži da je $n! > 2^n$, $n \geq 4$, $n \in \mathbf{N}$.

Dokaz.

1° BI.

Za $n = 4$ imamo: $4! = 24 > 2^4 = 16$, a to je istina.

2° PI.

Neka je za $n = k + 3$, $k \in \mathbf{N}$, istinita tvrdnja:

$$(k+3)! > 2^{k+3}.$$

3° KI.

Na temelju PI treba dokazati da je za $n = k + 4$ istinita tvrdnja:

$$(k+4)! > 2^{k+4}.$$

$(k+4)! = (k+3)!(k+4) > 2^{k+3} \cdot (k+4) > 2^{k+3} \cdot 2 = 2^{k+4}$, jer je $k + 4 > 2$ za $k \in \mathbf{N}$.

Time je dokaz završen.

* * *

Kao što smo već i naglasili, ovaj se postupak uspješno koristi kod nekih nejednakosti (usporedite!). Postoje pak nejednakosti kod kojih se ovim načinom ne ostvaruje bolja učinkovitost nego "standardnim" načinom. Zapravo je približno jednako raditi na oba načina. No pokazalo se da je učenicima lakše razumjeti i raditi na gore prikazan način.

VREMENIK MATEMATIČKIH NATJECANJA

— *školska natjecanja:*	*do 1. veljače 2003.*
— *općinska-gradska natjecanja:*	*7. ožujka 2003.*
— *županijska natjecanja:*	*4. travnja 2003.*
— *državno natjecanje:*	*od 7. do 10. svibnja 2003.*
— *međužupanijska natjecanja:*	*23. svibnja 2003.*