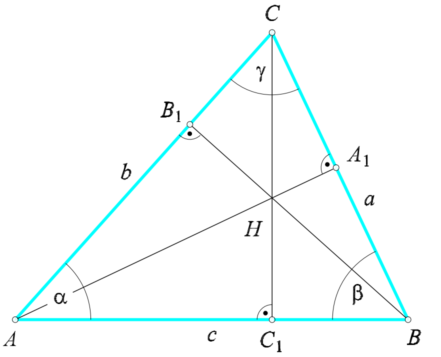
Uz rješenje jednog zadatka

Alija Muminagić, Nykøbing F., Danska

U časopisu Matematika i škola broj 13, veljača 2002. godina III. objavljen je veoma lijep članak *Mali matematički izlet*, čiji autor je Anđelko Marić, Sinj. Citiramo jedan dio iz tog članka, koji je bio povod za ovaj članak. Citat: "Međutim, novi matematički zadatak ili problem može nastati, rekli bismo, i sasvim slučajno. Naime, rješavajući neki zadatak ili problem, katkad se uoče neke relacije od kojih se može sastaviti novi zadatak ili problem koji u konačnici, nema nikakve veze s polaznim zadatkom."

Da je to upravo tako, vidjet ćemo i iz ovog zadatka, koji je interesantan sam po sebi (rješavanje prepuštamo čitateljima), a iz kojeg dobivamo isto tako interesantan nusprodukt. To je ovaj zadatak:

U šiljastokutnom trokutu $\triangle ABC$ vrijedi da je $\frac{a}{AH}+\frac{b}{BH}+\frac{c}{CH} \geq \frac{s^2}{T}$ gdje su a, b i c duljine stranica tog trokuta, s poluopseg, T površina, i točka H ortocentar tog trokuta.



Pogledajmo što ćemo dobiti. Uz oznake kao na slici imamo da je $\triangle AA_1B \sim \triangle BC_1C$ i $\triangle AA_1B \sim \triangle AC_1H$ i odatle slijedi $\triangle AC_1H \sim \triangle BC_1C$. Iz te sličnosti proizlazi $\frac{a}{AH} = \frac{CC_1}{AC_1} =$

$\operatorname{tg}\alpha$ i analogno $\dfrac{b}{BH} = \operatorname{tg}\beta$ i $\dfrac{c}{CH} = \operatorname{tg}\gamma$.

Tako smo dobili da trebamo dokazati da je $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \geq \dfrac{s^2}{T}$. Zbog $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$, $\quad T = r^2\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}\right)$ i $\quad s = r\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}\right)$ imamo

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \geq \frac{s^2}{T} \implies \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma \geq \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

$$\implies \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma \geq \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

$$\left(\text{zbog} \quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\implies \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \cdot \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} \geq \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{1+\cos\beta}{\sin\beta} \cdot \frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

$$\left(\text{upotrijebili smo da je} \quad \operatorname{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{i} \quad \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{\sin x}\right)$$

$$\implies \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin^2\beta}{\cos\beta} \cdot \frac{\sin^2\gamma}{\cos\gamma} \geq (1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)$$

$$\implies \frac{(1-\cos^2\alpha)}{\cos\alpha} \cdot \frac{(1-\cos^2\beta)}{\cos\beta} \cdot \frac{1-\cos^2\gamma}{\cos\gamma} \geq (1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)$$

$$\implies \frac{(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha} \cdot \frac{(1-\cos\beta)}{\cos\beta} \cdot \frac{(1-\cos\gamma)}{\cos\gamma} \geq 1$$

$$\implies (1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) \geq \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Zaista neočekivan dokaz za jednu nejednakost u šiljastokutnom trokutu.

B.C.PRETPOTOPNJACI