CASs u našim školama: Neki aksiomi i primjeri

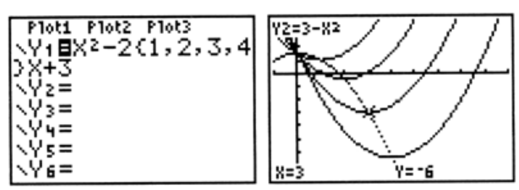
John F. Mahoney, Washington

Uporabom *CASs*-a (Computer algebra systems) učenici mogu riješiti tradicionalne algebarske zadatke, kao i računske zadatke, ali kako im CASs može pomoći pri učenju matematike? CASs može faktorizirati izraze, rješavati jednadžbe i sustave jednadžbi, simbolički računati derivacije i integrale, rješavati diferencijalne jednadžbe i tako redom. S obzirom na snažna oruđa koja CASs pruža, važno je predvidjeti kako će utjecati na nastavu matematike. Ovaj članak sadrži sedam pomalo provokativnih aksioma te primjere o uporabi CASs-a u našim školama.

Aksiom 1. *CASs ima potencijal za poboljšanje učenikova razumijevanja matematike, a jednako tako učenicima pomažu i grafički kalkulatori.*

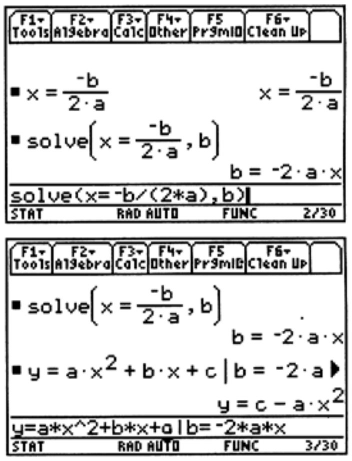
Tijekom više od jednog desetljeća učenici koriste grafičke kalkulatore za istraživanje pojmova s grafičkog i numeričkog gledišta. Kalkulatori brzo crtaju grafove najrazličitijih funkcija, uključivo i onih koje su zadane parametarski ili u polarnim koordinatama. Osim toga, lako generiraju tablice vrijednosti funkcija i koriste tehnike regresije za konstrukciju funkcija kao modela podataka. Učenici mogu brzo i lako uočiti veze među grafovima različitih funkcija. Oni koriste grafičke sposobnosti kalkulatora za istraživanje svojstava funkcija, nalazeći nule, vrhove i sjecišta grafova. CASs daje učenicima oruđe za izučavanje matematike algebarskim putem.

Primjer 1. Na **slici 1.** prikazani su grafovi četiriju parabola oblika $y = x^2 - 2kx + 3$. Učenik pomoću grafičkog kalkulatora može vidjeti učinak promjene parametra k, te vezu između k i tjemena parabole.



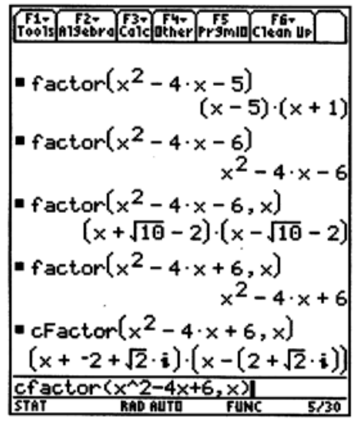
Slika 1.

Pomoću CAS kalkulatora učenik može odrediti koordinate vrhova $(k, 3 - k^2)$ istražujući te iste parabole, te zaključiti da su svi ti vrhovi točke parabole $y = 3 - x^2$, kako se to vidi na **slici 1.** Učenik bi mogao pokušati poopćiti ovaj rezultat i odrediti skup svih vrhova parabola $y = ax^2 + bx + c$ kada se b mijenja, što je prikazano na **slici 2.** Ovdje je iz jednakosti za x koordinatu vrha $x = -\dfrac{b}{2a}$ izražen b, te je uvršten u opću jednadžbu kako bi se dobila jednadžba $y = c - ax^2$ skupa svih tjemena opće parabole.



Slika 2.

Primjer 2. Što se misli pod pojmom *faktorizirati polinom*? Odgovor ovisi o tome mislimo li na faktorizaciju nad poljem racionalnih, realnih ili kompleksnih brojeva. Kalkulatori TI-89 i TI-92 dopuštaju korisniku izbor željenog polja. **Slika 3.** ilustrira sintaksu naredbi. Naredba da se faktorizira $(x^2 - 4 \cdot x - 5)$ daje rezultat $(x - 5) \cdot (x + 1)$, rastav ovog kvadratnog polinoma nad poljem racionalnih brojeva. Naredba da se faktorizira $(x^2 - 4 \cdot x - 6)$ daje rezultat $x^2 - 4 \cdot x - 6$, budući da ovaj polinom nema faktorizacije nad poljem racionalnih brojeva. Za faktorizaciju polinoma nad poljem realnih brojeva, valja u naredbu uključiti x. Slično, polinom x^2-4x+6 se ne može faktorizirati nad poljem realnih brojeva, ali može nad poljem kompleksnih, što se postiže promjenom naredbe od *factor* na *cfactor*. Važnost razmatranja polja pri faktorizaciji polinoma postaje očitija zbog toga što kalkulatori TI-89 i TI-92 koriste malo drukčije naredbe za faktorizaciju nad racionalnim, realnim ili kompleksnim brojevima.

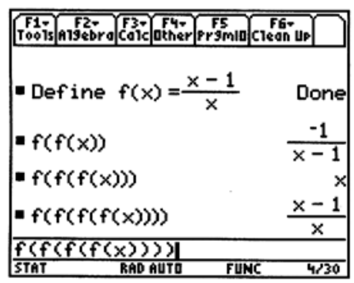


Slika 3.

Primjer 3. Učenici mogu koristiti CASs za izučavanje kompozicije funkcija. **Slika 4.** prikazuje učinak uzastopnog slaganja funkcije

$$f(x) = \frac{x-1}{x}$$

sa samom sobom. Nakon tri iteracije rezultat je identiteta $I(x) = x$, a sljedeća iteracija ponovo daje izvornu funkciju.



Slika 4.

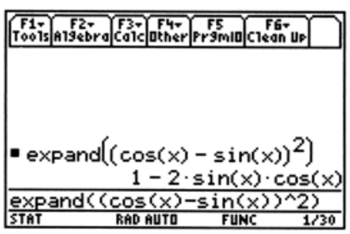
Aksiom 2. *CASs može omogućiti učenicima da dobro nauče srednjoškolsku matematiku i račun, čak i onda kad nisu dobro ovladali algebrom.*

Velik dio algebre čini poopćena aritmetika. Grafički kalkulator učenicima može pomoći pri učenju algebarskih pojmova čak i onda kad oni i ne vladaju aritmetikom. Kalkulatori mogu precizno izvoditi aritmetičke operacije umjesto učenika, omogućujući im time da se usredotoče na algebarske pojmove i tehnike. Procjenjuje se da učenici nisu spremni za učenje algebre u 8. ili 9. razredu jer je njihovo baratanje aritmetikom nedostatno. Znanstveni i grafički kalkulatori mogu im pomoći da mnogo lakše izučavaju i uče algebru. Velik dio računa čine poopćena algebra i geometrija. Račun omogućuje učenicima usmjeravanje s koledža prema znanosti, ekonomiji i matematici. Učenici nisu sposobni izučavati račun jer nisu ovladali algebrom i srednjoškolskim gradivom. CAS kalkulatori omogućuju im izučavanje i ovladavanje pojmovima srednjoškolske matematike i računa.

Primjer 4. Jedan mi je učenik došao tražeći pomoć jer nije dobivao točno rješenje pri pokušaju izračunavanja

$$\int (\cos x - \sin x)^2 dx.$$

Pogledao sam njegov rad i vidio da je pogrešno raspisao $(\cos x - \sin x)^2$ kao $\cos^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x$. On nije uvidio da je načinio algebarsku pogrešku, a ne grešku iz računa. Dao sam mu neka pokuša provesti ovo kvadriranje na svojem CAS kalkulatoru, kao što je pokazano na **slici 5.** i pomogao mu shvatiti zbog čega njegov rezultat nije bio ekvivalentan rezultatu kalkulatora.

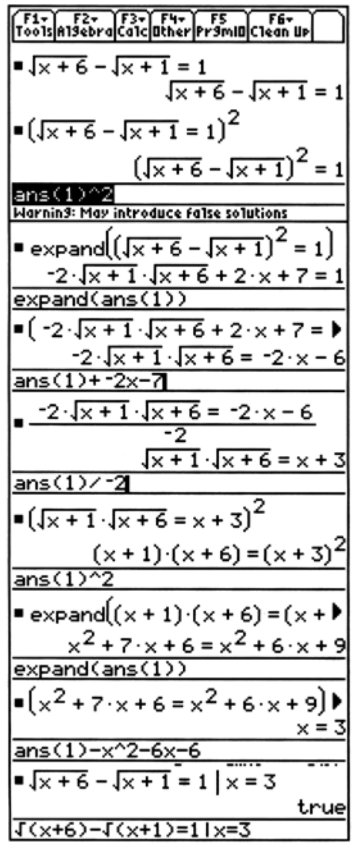


Slika 5.

Primjer 5. Razmotrimo jednadžbu

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} = 1,$$

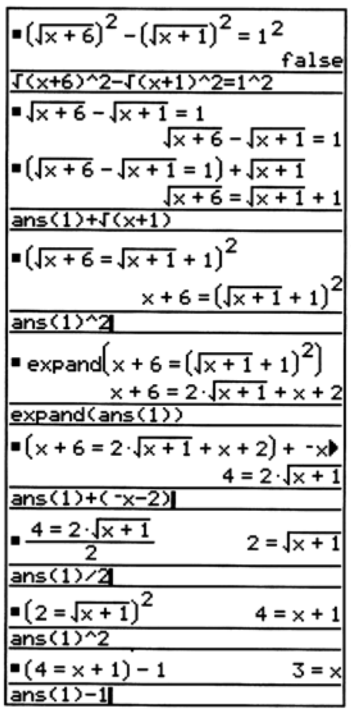
koju sam prikazao pomoću grafoskopa u mojem naprednom razredu. Učenici tradicionalno čine mnoge algebarske pogreške kad rješavaju jednadžbe s korijenima. Često se gube u detaljima problema i ne uviđaju točan pristup koji uključuje generiranje mogućih korijena, nakon čega slijedi eliminacija suvišnih rješenja. Budući da CASs otklanja dosadu računanja, on može pomoći učenicima da se usredotoče na cjelinu. Kao učitelj bio sam spreman primijeniti sljedeći primjer kako bih učenicima pomogao da se koncentriraju na postupak, a ne na detalje.



Slika 6.

Moji su učenici najprije predlagali da se obje strane jednadžbe kvadriraju, kako je to prikazano na **slici 6.** Uočili smo upozorenje *"Moguće uvođenje pogrešnih rješenja"*, koje daje TI-89 kad korisnik izvodi ovu operaciju. Ova konstatacija upozorava korisnika na potrebu provjere zbog suvišnih rješenja. Razred je htio kvadrirati jednadžbu, potom smo s obje strane jednadžbe dodali $(-2x - 7)$ te podijelili s -2. Ponovo smo kvadrirali i izmnožili. Dodavanjem $-x^2-6x-6$, dobili smo rješenje za x. Rezultat smo provjerili uvrštavanjem u originalnu jednadžbu.

Upitao sam tada učenike znaju li još neki put rješavanja ove jednadžbe. Jedna je sugestija bila kvadrirati svaki član, kao što je prikazano na **slici 7.** Kalkulator je uzvratio da je rezultat pogrešan jer je ova jednadžba ekvivalentna sa $(x+6)-(x+1)=1$, ili $5=1$. Druga je sugestija bila s obje strane jednadžbe dodati $\sqrt{x+1}$ i tada kvadrirati. Nakon toga s obje strane jednadžbe dodajemo $-x-2$ i podijelimo s 2. Nakon još jednog kvadriranja i oduzimanja 1, dobili smo iste vrijednosti za x kao i primjenom prvog postupka.



Slika 7.

Ovaj primjer ilustrira uporabu CAS kalkulatora više za usredotočenje na osnovne, šire zahvate pri rješavanju ovakvih jednadžbi, nego na detalje pojedinih koraka. Bilo bi idealno kad bi učenici nakon što su vidjeli primjere poput ovoga, bili sposobni samostalno rješavati slične probleme. Projiciranjem ovog primjera grafoskopom ili njegovim prikazom na monitoru, učitelji mogu potaknuti učenike na suradnju. Učenici mogu sugerirati koje korake poduzeti, te neposredno vidjeti posljedice svojih sugestija. CAS kalkulatori mogu omogućiti dinamičnost pri učenju algebre.

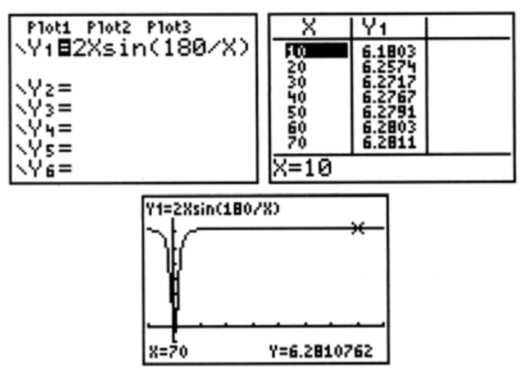
Aksiom 3. *CASs će učiteljima srednjoškolske matematike olakšati uvođenje pojmova računa.*

Učitelji aritmetike koji misle unaprijed, uvode algebarske i geometrijske pojmove dok podučavaju učenike na nižem stupnju znanja. Oni upoznaju svoje učenike s postupkom rješavanja linearnih jednadžbi i svojstvima geometrijskih likova. U srednjoj školi učitelji mogu koristiti CASs kako bi svojim učenicima približili pojmove iz računa.

Primjer 6. Učitelj može najprije uvjeriti svoje učenike, primjerice, da opseg pravilnog $n-$terokuta upisanog kružnici polumjera r može biti zadan formulom

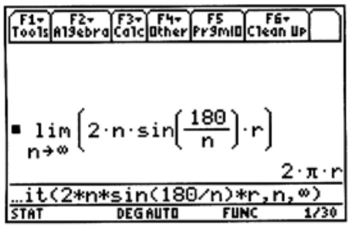
$$p = 2n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\cdot r.$$

Može im zadati da pomoću grafičkog ili CAS–kompatibilnog kalkulatora iz ove formule izračunavaju p za posebne vrijednosti od n i r. Na **slici 8.** varijabla x je na mjestu n a r ima vrijednost 1. Graf i obje tablice vrijednosti ukazuju da je porastom vrijednosti x, vrijednost izraza sve bliža broju 6.2811, što je približno 2π. Učitelj tada može iskoristiti CAS kalkulator za neformalno uvođenje



Slika 8.

pojma limesa, računajući limes kad n neograničeno raste, kao što je prikazano na **slici 9.**

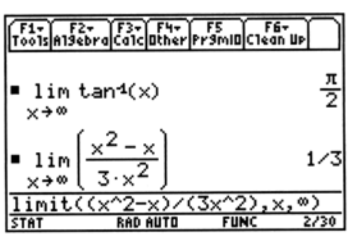


Slika 9.

Primjer 7. Srednjoškolski nastavnik mogao bi uporabiti CAS kalkulator kao pomoć pri poučavanju horizontalnih asimptota, te istovremeno uvesti pojam limesa.

On može postaviti razredu pitanje: *"Kako se ponaša funkcija $y = \operatorname{tg}^{-1} x$ za velike vrijednosti od x? Koristi svoj kalkulator za istraživanje ove funkcije."* Neki bi učenici za x mogli uvrštavati velike vrijednosti. Drugi bi crtali graf funkcije nad velikom domenom i tragali dalje. Neki znaju dobiti vrijednosti bliske 90, a neki drugi bliske 1.571, već prema tome jesu li radili u stupnjevima ili radijanima. Učenici bi trebali prihvatiti činjenicu da ova funkcija ima horizontalnu asimptotu. Učitelj tada može upotrijebiti CAS kalkulator da bi izračunao limes kada x teži u beskonačnost, a to je prikazano na **slici 10.** Ako je kalkulator podešen na stupnjeve, onda je odgovor 90. Razred potom može istraživati ponašanje iste funkcije kad je x sve manji i manji. Drugi bi primjer mogao uključiti računanje horizontalne asimptote funkcije

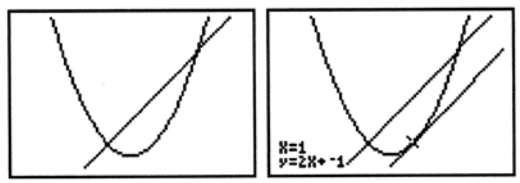
$$y = \frac{x^2 - x}{3x^2},$$



Slika 10.

što je također prikazano na **slici 10.**

Primjer 8. Učitelji algebre mogu uvesti pojam derivacije tako da učenici nacrtaju parabolu na grafičkom ili CAS kalkulatoru i odaberu neke njezine dvije točke. Oni mogu računati nagib pravca koji prolazi tim dvjema točkama. Na **slici 11.** dana je parabola $y = x^2$, a odabrane točke su $(-1, 1)$ i $(3, 9)$. Jednadžba pravca tim dvjema točkama je $y = 2x + 3$. Zatim nacrtamo tangentu na krivulju u točki s apscisom $x = 1$, što je aritmetička sredina apscisa dviju prethodno odabranih točaka. Neki kalkulatori, kao TI-83 Plus, imaju naredbu koja korisniku omogućuje crtanje tangente na krivulju u njezinoj pojedinoj točki. Učenici mogu uočiti kako je ova tangenta paralelna s prvim pravcem, kao što se vidi na **slici 11.**



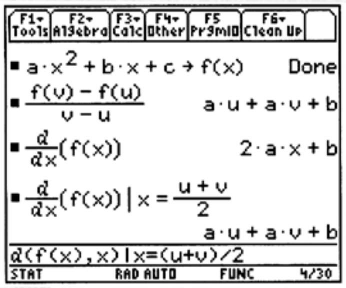
Slika 11.

Vrijedi li ovaj rezultat uvijek? Učitelj može uz pomoć CAS kalkulatora poopćiti ovaj primjer. Najprije treba objasniti da je simbol $\frac{dy}{dx}$ zapis nagiba tangente na krivulju.

Na **slici 12.** dana je parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$, a dvije njezine točke su $(u, f(u))$ i $(v, f(v))$. Kalkulator pokazuje da je nagib pravca koji spaja te dvije točke jednak $a \cdot u + a \cdot v + b$. I dalje, zapis

$$\frac{d}{dx}(f(x))$$

znači nagib tangente za bilo koji x. Izračunamo li taj nagib za x koji je srednja vrijednost $x-$koordinata dviju odabranih točaka, vidimo da je nagib grafa u toj točki također jednak $a \cdot u + a \cdot v + b$. Ovo pokazuje da je nagib sekante parabole jednak nagibu tangente u točki čija je apscisa aritmetička sredina apscisa dviju točaka u kojima sekanta siječe parabolu.



Slika 12.

Aksiom 4. *CASs omogućuje korisnicima eksperimentiranje sa srednjoškolskom matematikom i računom, kod čega valja biti oprezan pri oslanjanju na algebarsku točnost sustava i njegovu korektnu uporabu.*

CASs osigurava korisnicima pouzdanost u algebarsku, kao i numeričku točnost. Korisnici mogu eksperimentirati s promjenama bez višestrukog mukotrpnog rada na detaljima. CASs dopušta korisnicima da se usredotoče na postavljene probleme kao cjeline, prije nego na detaljne postupke rješavanja svakog od njih. Ovo oslanjanje na točnost mora biti utemeljeno na razumijevanju ograničenja sustava, jer kalkulator ponekad daje rezultate koji mogu odvesti u krivom smjeru.

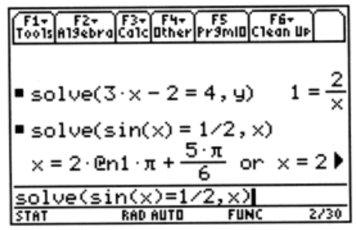
Primjer 9. Na **slici 13.** prikazano je jedno očito pogrešno rješenje dviju jednadžbi. U prvoj, kalkulator pokušava riješiti jednadžbu $3 \cdot x - 2 = 4$ po y. Neočekivan rezultat $1 = \frac{2}{x}$, ekvivalentan je s $x = 2$, vrijednošću od x koja zadovoljava jednadžbu. Rješenje što ga daje kalkulator za drugu jednadžbu, $\sin x = \frac{1}{2}$, također je neočekivano:

$$x = 2 \cdot @n1 \cdot \pi + \frac{5 \cdot \pi}{6},$$

ili

$$x = 2 \cdot @n1 \cdot \pi + \frac{\pi}{6}.$$

$@n1$ je zapis kalkulatora za bilo koji cijeli broj koji je upotrijebljen za zapis općeg rješenja jednadžbe.

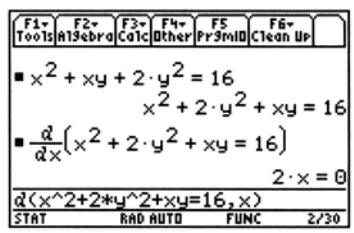


Slika 13.

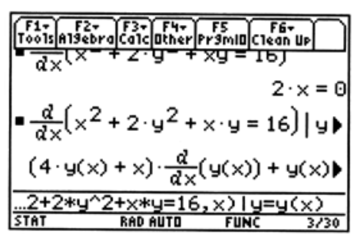
Primjer 10. Učenici koji uče račun i koji pokušavaju derivirati implicitno zadane funkcije uporabom svojih kalkulatora, trebaju to raditi vrlo oprezno. Razmotrimo krivulju čija je jednadžba $x^2 - xy + 2y^2 = 16$, i pokušajmo naći izraz za $\frac{dy}{dx}$.

Kao što vidimo na **slici 14.**, kalkulator prepoznaje član xy kao varijablu, a ne kao umnožak x i y. On y i xy znade tretirati kao konstante, a ne kao izraze koji ovise o x. Zbog toga i daje rezultat $2 \cdot x = 0$. Mi moramo izraziti y kao funkciju od x, $y(x)$, kako bi kalkulator točno proveo deriviranje, a član xy mora se unijeti kao $x \cdot y$, kako se vidi na **slici 15.**

Geometer's Sketchpad i drugi programi dopuštaju naredbe koje se spremaju kao "script" i kasnije ponavljaju. TI-89 i TI-92 imaju sličan kapacitet. Sve naredbe koje korisnik



Slika 14.



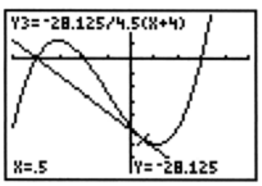
Slika 15.

unosi u kalkulator mogu biti sačuvane kao tekst. Taj tekst se može ponoviti korak po korak kao script. On se također može jednostavno preinačiti. Ovo svojstvo korisnicima omogućuje istraživanje algebarskih relacija. Korisnik može krenuti s posebnim primjerom, i ako se rezultat pokaže zanimljivim, rad može biti spremljen kao script. Tada primjer može biti zamijenjen nekim drugim primjerom istog tipa. Ako su rezultati još zanimljivi, script može biti iskorišten za pokušaj skiciranja suštine dokaza relacije.

Primjer 11. Razmotrimo polinom trećeg stupnja s korijenima $3,\ -2$, i -4. Nacrtajmo graf polinoma $y=(x-3)(x+2)(x+4)$. Aritmetička sredina prvih dvaju korijena je

$$\frac{3+(-2)}{2}=0.5.$$

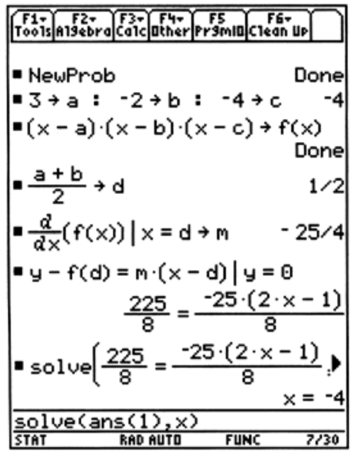
Nacrtajmo tangentu na graf u točki $x=0.5$ i na **slici 16.** uočimo da ta tangenta prolazi trećom nultočkom polinoma.



Slika 16.

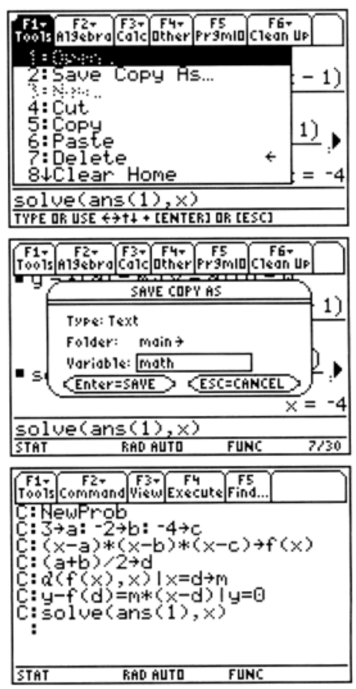
Pomoću TI-89 možemo utvrditi prolazi li tangenta uistinu točkom $(-4,0)$. Slijede koraci prikazani na **slici 17.**:

- Unesemo odabrani polinom kao $f(x)$.
- Nađemo aritmetičku sredinu prvih dvaju korijena.
- Nađemo vrijednost derivacije u toj srednjoj vrijednosti.
- Iskoristimo jednadžbu pravca kako bismo našli vrijednost od x u kojoj tangenta siječe os x.
- Riješimo ovu jednadžbu po x i utvrdimo da tangenta siječe os x u $x=-4$, u trećoj nultočki.

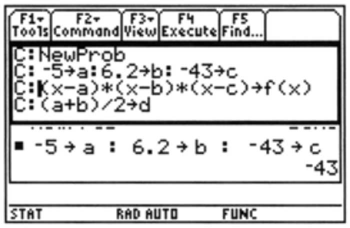


Slika 17.

Kao sljedeći korak, koristimo tekst editor za spremanje kopije ovih unosa kao scripta, što je prikazano na **slici 18.** Mogli bismo promijeniti vrijednosti a, b i c te ponoviti script korak po korak kako bismo istražili vrijedi li ovo svojstvo i za neki drugi polinom trećeg stupnja, kao što prikazuje **slika 19.**

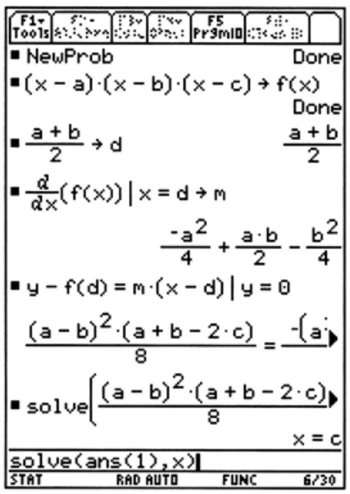


Slika 18.



Slika 19.

Zanimljivije je što možemo ukloniti drugu liniju scripta i odrediti je li to svojstvo uvijek istinito. **Slika 20.** prikazuje rezultat provođenja scripta bez naredbe davanja posebnih vrijednosti za a, b i c. Suština algebarskog dokaza ovog svojstva polinoma trećeg stupnja provedena je ovim skriptom. Kao i prije, tangenta na kubnu parabolu u aritmetičkoj sredini dviju nultočaka prolazi trećom nultočkom $x = c$.



Slika 20.

Učenici mogu otkrivati i dokazivati i druga zanimljiva svojstva polinoma i ostalih funkcija. Možda će učenicima ovakav posao izgledati prezahtjevan bez pomoći CASs-a, no s njim je sasvim prihvatljiv.

Aksiom 5. *CASs će promijeniti matematiku koju učimo u školama i načine kako je učimo, slično promjenama što su se zbile u vrijeme kad smo počeli upotrebljavati znanstveni i grafički kalkulator.*

Popularnost CAS kalkulatora postat će katalizator promjena. Oni postaju popularni zbog tri razloga:

- relativno su jeftini i prodaju se na mnogim mjestima u maloprodaji;
- novi modeli su lakši za upotrebu;
- dopušteni su na SAT I i SAT II matematici, te na AP ispitima.

Sve više učenika koristi CAS kalkulatore. Neki moji učenici kupuju ih umjesto običnih grafičkih kalkulatora. Oni očekuju da njihovi nastavnici dobro barataju CAS kalkulatorima; da su sadržaji njihovih predavanja usklađeni s mogućnostima kalkulatora, te da se CAS kalkulatori mogu koristiti u rješavanju domaće zadaće, te na testovima i ispitima.

Prije trideset godina podučavao sam učenike kako koristiti "rehenšiber", kako interpolirati iz tablica vrijednosti, kako manipulirati karakteristikama i mantisama logaritama, algoritmima kvadratnog korijena, Hornerovim postupkom, Descartovim pravilom o predznacima, i čitavom nizu drugih tema. Znanstveni su kalkulatori izmijenili ono što smo podučavali u 70-im godinama prošlog stoljeća. Grafički kalkulatori izmijenili su ono što smo podučavali u 90-im. Nekada smo analizirali funkcije kako bismo dobili njihove grafove, a sada često koristimo graf funkcije kako bismo uočili njezina svojstva. CASs se sve više koristi na računalima, a osobito na kalkulatorima. Moje je predviđanje da će se povećanim korištenjem CASs-a manje značaja pridavati tehnikama rješavanja jednadžbi, pojednostavljanju izraza, rješavanju sustava jednadžbi, faktorizaciji polinoma, računanju derivacija i integrala. Previđam da će se veći značaj pridavati modeliranju i primjenama. Najvažnije pitanje matematičkog obrazovanja uvijek je bilo *Što podučavati?* Vjerujem da ćemo podučavati kako modelirati situacije, postavljati probleme te kako ih riješiti. Ostalo će učenici često biti u stanju riješiti samostalno uz pomoć CASs-a. Do kraja desetljeća CAS kalkulatori će izmijeniti nastavu matematike u našim učionicama. Jedva čekam!