Eulerova formula

Mea Bombardelli, Zagreb

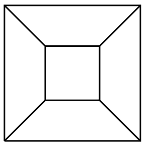
U matematici je poznato nekoliko Eulerovih (Leonhard Euler, 1707. – 1783.) teorema i formula. Ovaj članak posvećen je formuli koja povezuje broj vrhova V, bridova B i strana S konveksnog poliedra:

$$V - B + S = 2.$$

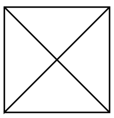
Primjerice, n-strana prizma ima $2n$ vrhova, $3n$ bridova i $n+2$ strana. Za n-stranu piramidu je $V = n+1$, $B = 2n$ i $S = n+1$. U oba je slučaja $V - B + S = 2$.

Dokaza Eulerove formule ima mnogo. Sam Euler nije dao precizan dokaz. Prvi dokaz dao je Legendre (Adrien Marie Legendre, 1752. – 1833.) 1794. g. Ovdje ćemo prikazati jedan od elementarnijih. Prvi je ovakav dokaz dao Cauchy (Augustin Louis Cauchy, 1789. – 1857.) 1811. godine. Više dokaza može se naći na Internet stranici [3].

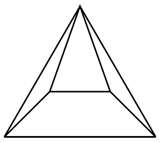
Nacrtajmo u ravnini mrežu bridova poliedara. Npr., kocku možemo prikazati kao na slici 1, a četverostranu piramidu kao na slici 2 ili 3.



Sl. 1.



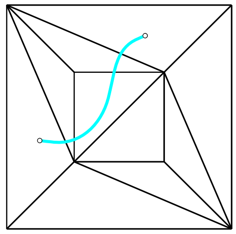
Sl. 2.



Sl. 3.

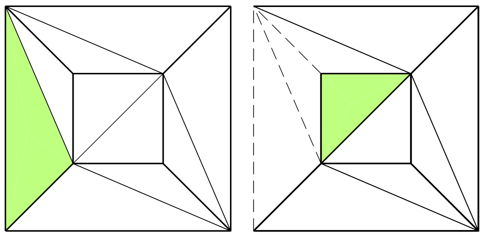
Ovakva ravninska mreža ima isti broj vrhova i bridova kao i promatrani poliedar, te onoliko strana na koliko je područja podijeljena ravnina (brojeći i vanjsko, neograničeno područje). Ako neko od omeđenih područja nije trokut, nacrtamo njegovu dijagonalu — time se broj bridova i broj područja (strana) povećavaju za 1, pa se vrijednost izraza $V - B + S$ ne mijenja. Postupak ponavljamo dok sva unutarnja područja ne budu trokuti. (Vršimo triangulaciju.)

Krenimo dakle od povezanog planarnog grafa (graf je planaran ako se može nacrtati u ravnini tako da mu se bridovi ne sijeku), čija su sva unutarnja područja trokuti. Također pretpostavljamo (a to je ispunjeno za mrežu nastalu od konveksnog poliedra na opisani način) da se *svake dvije unutarnje točke mogu povezati putem koji nema zajedničkih točaka s rubom.* $(*)$



Sl. 4.

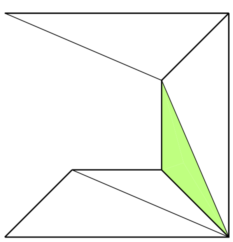
Uočimo jedan "rubni" trokut. On ima jedan ili dva vanjska brida. Uklanjanjem tog trokuta, u prvom slučaju B i S se smanjuju za jedan, dok se V ne mijenja. U drugom slučaju V i S se smanjuju za jedan, a B za dva.



Sl. 5.

U oba slučaja vrijednost izraza $V-B+S$ ostaje nepromijenjena. Nastavljamo uklanjati trokute pazeći da graf stalno ostane povezan. U nekom trenutku ostat će samo jedan trokut, tj. tri vrha, tri brida i dva područja. Dakle, na kraju cijelog postupka je $V-B+S=2$, a kako se postupkom nije mijenjala vrijednost tog izraza, isto je vrijedilo i za polaznu trianguliranu mrežu pa tako i za polazni poliedar.

Indukcijom po broju trokuta pokazuje se da uvijek postoje barem dva rubna trokuta koje možemo ukloniti, a da se navedeno svojstvo $(*)$ ne naruši. Naime, pretpostavimo li da je uklanjanje nekog rubnog trokuta razdvojilo unutarnje točke,



Sl. 6.

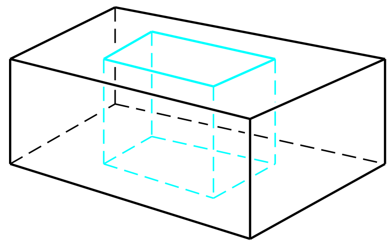
tada u svakom od nastalih dijelova (po pretpostavci indukcije) postoje dva trokuta koje možemo ukloniti. Barem po jedan od njih je uklonjiv u kompletnom grafu.

Ovim je dokazan teorem:

Teorem. *U konveksnom poliedru za broj vrhova V, broj bridova B i broj strana S vrijedi formula $V-B+S=2$.*

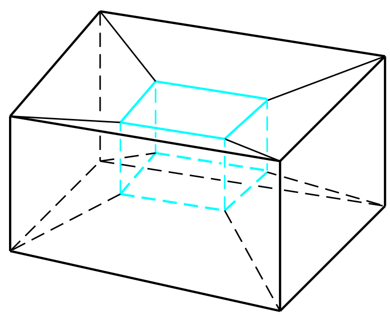
Razmotrimo nekoliko primjera.

Primjer 1. Za ovo tijelo je $V=16$, $B=24$ i $S=10$, i vrijedi $V-B+S=2$.



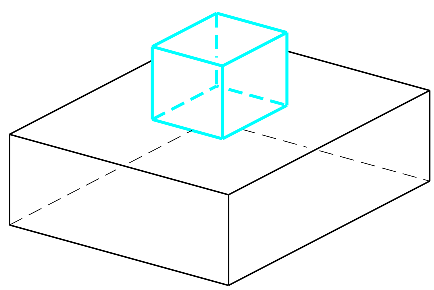
Sl. 7.

Primjer 2. Poliedar na slici 8., iako oblikom sličan prethodnom, ima 16 vrhova, 32 brida i 16 strana. Stoga je za njega $V-B+S=0$.



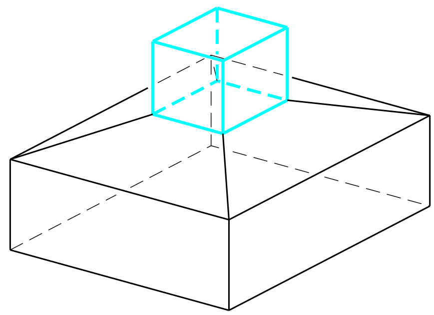
Sl. 8.

Primjer 3. $V=16$, $B=24$, $S=11$; $V-B+S=3$.



Sl. 9.

Primjer 4. $V = 16$, $B = 28$, $S = 14$, i vrijedi $V - B + S = 2$.



Sl. 10.

Ovi primjeri pokazuju da formula općenito ne vrijedi za konkavne poliedre, ali za neke od njih ipak vrijedi. Zanimljiva rasprava o dokazima i području valjanosti Eulerove formule nalazi se u [1].

Može se pokazati da vrijedi poopćenje Eulerove formule: $V - B + S = 2 - 2k + m$, gdje je k broj "rupa" kroz poliedar, a m broj njegovih prstenastih strana. Ovu je relaciju prvi otkrio L'Huilier (Simon Antoine Jean L'Huilier, 1750. – 1840.) 1812. g.

U prvom primjeru je $k = 1$ i $m = 2$, pa je $V - B + S = 2 - 2 + 2 = 2$.

U drugom primjeru imamo jednu rupu, ali nema prstenastih strana, pa je $V - B + S = 2 - 2 = 0$. U trećem primjeru nema rupa, i samo je jedna prstenasta strana, pa je $V - B + S = 2 + 1 = 3$. U četvrtom slučaju nema ni rupa ni prstenastih strana, pa vrijedi obična Eulerova formula.

Pravilni poliedri

Pokažimo sada pomoću Eulerove formule da postoji samo 5 pravilnih (Platonovih) tijela. Strane pravilnog poliedra su sukladni pravilni poligoni, recimo n-terokuti. U svakom se vrhu sastaje isti broj bridova, recimo k. Naravno, tada se u svakom vrhu sastaje k strana.

Kako svaka strana ima n vrhova, a u svakom vrhu sastaje se k strana, slijedi $nS = kV$, odnosno $V = nS/k$. Slično razmatranje bridova daje nam $nS = 2B$, odnosno $B = nS/2$, jer svaki brid pripada dvjema stranama.

Uvrštavanjem u Eulerovu formulu dobivamo

$$nS/k - nS/2 + S = 2,$$

odnosno

$$S = 4k/(2n + 2k - nk)$$

i dalje

$$V = 4n/(2n + 2k - nk),$$
$$B = 2nk/(2n + 2k - nk).$$

Kako ovi brojevi moraju biti pozitivni, mora vrijediti $2(k + n) > nk$. Također mora biti $n \geq 3$ i $k \geq 3$. Pretpostavimo da je $k \leq n$. Tada iz $4n \geq 2(k + n) > nk$ slijedi $k < 4$, tj. $k = 3$. Dalje iz $2(3 + n) > 3n$ slijedi $n < 6$. Obrnuto, iz $k \geq n$ slijedi $n = 3$ i $k < 6$.

Stoga su jedine mogućnosti za (n, k):

$$(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3).$$

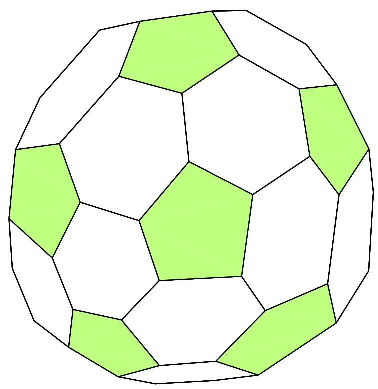
Odgovarajuće vrijednosti za V, B i S prikazane su u tablici:

n	k	V	B	S	
3	3	4	6	4	tetraedar
3	4	6	12	8	oktaedar
3	5	12	30	20	ikosaedar
4	3	8	12	6	heksaedar
5	3	20	30	12	dodekaedar

Primjećujemo da nazivi ovih tijela dolaze od grčkih riječi za broj strana.

Polupravilni poliedri

Eulerovu formulu možemo koristiti pri proučavanju polupravilnih poliedara. Polupravilni poliedri imaju za strane pravilne poligone, ali dvije različite vrste. Npr. "nogometna lopta" (slika 11) sastoji se od pravilnih peterokuta i šesterokuta, pri čemu se u svakom vrhu sastaju jedan peterokut i dva šesterokuta. Znajući samo to, odredit ćemo broj vrhova "lopte". Označimo ukupan broj peterokutnih strana s m, a ukupan broj šesterokutnih strana s n. Tada je $S = m + n$, $B = (5m + 6n)/2$ i $V = (5m + 6n)/3$. Iz Eulerove formule slijedi $m = 12$. Kako svaki vrh pripada točno jednom peterokutu, ukupan broj vrhova je $5m = 60$. No, kako se u svakom vrhu sastaju dva šesterokuta, broj vrhova jednak je i $6n/2 = 3n$. Slijedi $n = 20$. Dakle "nogometna lopta" ima 12 peterokutnih i 20 šesterokutnih strana, 60 vrhova i 90 bridova.



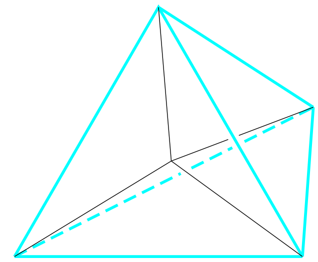
Sl. 11.

Višedimenzionalni prostori

Eulerova formula za trodimenzionalne poliedre je poopćenje trivijalne formule za poligone $V - B = 0$. Postavlja se pitanje možemo li poopćiti Eulerovu formulu na četvero- i višedimenzionalne politope. Možemo. Ako s N_0 označimo broj vrhova, s N_1 broj bridova, i općenito s N_k broj k-dimenzionalnih strana n-dimenzionalnog politopa, onda vrijedi sljedeće:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k N_k = 1 + (-1)^n.$$

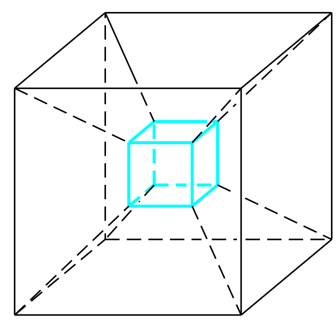
Dakle, u prostorima parne dimenzije $(2,4,\ldots)$ suma je 0, a u prostorima neparne dimenzije $(3,\ldots)$ suma je 2. Formulu je relativno lako provjeriti za simplekse i paralelotope.



Sl. 12.

Simpleks je analogon trokuta i tetraedra. Npr. simpleks s 5 vrhova A, B, C, D i E (to je četverodimenzionalno tijelo) ima 10 bridova (AB, AC,… DE), 10 dvodimenzionalnih strana (ABC,…) i 5 trodimenzionalnih strana ($ABCD$, $ABCE$, $ABDE$, $ACDE$ i $BCDE$). Navedena suma dakle iznosi 5-10+10-5=0.

Paralelotop je analogon paralelograma. Četverodimenzionalna (hiper)kocka predočena na dvodimenzionalnom papiru izgleda ovako:



Sl. 13.

Ona ima 16 vrhova, 32 brida, 24 dvodimenzionalne strane i 8 trodimenzionalnih strana (6 područja poput osjenčanog te "vanjska" i "unutarnja" kocka. Dakle, 16-32+24-8=0.

Literatura

[1] Imre Lakatos: *Dokazi i opovrgavanja*, Školska knjiga, 1991.

[2] Darko Veljan: *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, 2001.

[3] `http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler`