

Graf kvadratne funkcije



Šime Šuljić, Pazin



Programirani materijal za obradu nastavne jedinice u informatičkom kabinetu

Jedan usputni događaj potaknuo me na razmišljanje o tome poučavamo li učenike crtanje grafova elementarnih funkcija na način koji je sukladan vremenu. Proljetos sam u informatičkom kabinetu škole radio na računalu, a na susjednom je računalu učenik četvrtog razreda za zanimanje elektrotehničar pisao u Wordu maturalni rad iz svoje struke. Obratio mi se za pomoć kada mu nije polazilo za rukom oblikovanje slike umetnute u tekst. Problem smo riješili brzo, ali ono što me zasmetalo jest izgled tog grafa koji je jako odudarao od sinusoide koju je trebao predstavljati. Odmah mi je bilo jasno da je graf rađen u programu *Bojanje (Paint)* pomoću alata za crtanje Bezierovih krivulja. Razmislio sam na trenutak bih li ga upozorio na to da taj šiljasti brijeg i dol ni blizu ne predstav-

ljaju graf funkcije $f(x) = \sin x$, jer se čak i u udžbenicima nađe zamjetnih odstupanja u crtežima grafova. Kada je i sam izrazio nezadovoljstvo izgledom tog grafa, valjalo se uloviti crtanja novog grafa. Na svom računalu imam nekoliko specijaliziranih programa pomoću kojih se to može napraviti začas. No, problem je trebalo riješiti odmah, na licu mjesta i na takav način da učenik dalje može samostalno nastaviti rad na bilo kojem računalu u školi ili kod kuće, bez instalacije i učenja novih programa. Posegnuli smo za *Excelom* instaliranim na svakom školskom računalu, a koji u sebi sadrži bogatu paletu elementarnih matematičkih funkcija, pa smo problem otklonili na obostrano zadovoljstvo. Učenik je bio ohrabren i rekao da će sada u radu prikazati još neke grafove. Bilo je očito da je klasičnim načinom crtanja olovkom na papir učenik dobro upoznao svojstva funkcije sinus, ali da to nije mogao "tehnički" primijeniti na sadržaj svoje struke. Olako bismo mogli skinuti odgovornost sa sebe i reći da su ih u informatici kao predmetu mogli poučiti i matematičkoj strani programa *Excel*. Činjenica je da učenici nemaju toliko



sati informatike da bi mogli naučiti primjenu računala u svim predmetima niti bi to imalo smisla, već ima smisla težiti da nastavni predmeti u poučavanju svojih sadržaja posežu za suvremenom informatičkom tehnologijom.

Srećom, taj je trend u nastavi matematike u Hrvatskoj uočljiv, pogotovo otkad su prije godinu dana gotovo sve srednje škole opremljene projektorima i prijenosnim računalima. Područje matematike kojim se probija led primjene računala u nastavi gotovo su uvijek grafovi elementarnih funkcija. Koliko imam uvida u ono što rade članovi interetske diskusijske grupe *Nastava matematike* (<http://groups.yahoo.com/group/nastava-matematike/>), najčešće se koriste metoda demonstracije i razgovora uz projekciju s računala u razredu. Pritom se obično koriste program za prezentaciju *PowerPoint* ili *The Geometer's Sketchpad*, softver dinamične geometrije. O usporedbi tih alata u nastavi matematike bilo je riječi u članku "Ž-me napraviti prezentaciju" Ele Rac-Marinić-Kragić u 20. broju MŠ-a. Uporabom računala u demonstracijske svrhe napravljen je veliki korak u zornosti i osvježenju nastave, ali time sam učenik nije osposobljen da u novim sadržajima koristi tehnologiju. Osim toga, dok učenik u procesu učenja sam nije u interaktivnom odnosu s računalom, dakle pred monitorom i s mišem u ruci, ne možemo govoriti o onom pravom ulasku tehnologije u nastavni proces. Nameću se, dakle, dva važna cilja:

- osposobiti učenika da koristi računalno za manipulaciju matematičkim sadržajima i primjenama matematike
- i značajno individualizirati proces učenja uvođenjem računala u taj proces.

Širok je spektar računalnih programa kojima možemo prikazivati grafove funkcija, ali u programu nastavnog predmeta nema vremena, a niti ima smisla da svi učenici uče neke specijalizirane programe. Čest je, međutim, slučaj da u drugom razredu učenici uče *Excel* u sklopu predmeta informatike. Dodu-

še, grafovi elementarnih matematičkih funkcija ne dobivaju se tako elegantno u *Excelu* kao u specijaliziranim programima jednostavnim upisivanjem formule, jer radi se prije svega o programu za tablični proračun. Ali, baš ta odlika da moramo odrediti skup argumenata, a potom skup vrijednosti funkcije od tih argumenata, nam približava samo poimanje funkcije, njene domene i kodomene. Najbliže je to onome što se i inače radi crtajući grafove olovkom na papiru da se prethodno izračunaju neke vrijednosti funkcije. Zbliži li se jednom učenik s tim programom, moći će ne samo prikazivati grafove ostalih funkcija, nego i rješavati jednadžbe i sustave jednadžbi, izračunati determinante, aproksimativno tražiti rješenja jednadžbi, ispisivati članove nizova zadanih formulom općeg člana ili rekurzivnom relacijom, rabiti metodu uzajamnog približavanja u rješavanju raznih problema i još mnogo toga. Želimo li da učenik primjenjuje matematička znanja u svom budućem zanimanju i svakodnevnom životu, onda moramo biti svjesni da će vrlo malo rabiti matematiku olovke i papira, a vrlo mnogo matematiku računala. Pritom je širok spektar poslova u kojima će se posezati upravo za *Excelom*. A najbolje je da učenika s matematičkom stranom *Excela* upozna nastavnik matematike.

Obradu nastavne jedinice *Graf kvadratne funkcije* zamislio sam kao kombiniranu obradu klasičnim načinom crtanja grafova na školsku ploču, odnosno u bilježnicu, i istraživanje svojstava pomaka grafova individualno na računalu. Klasičnim načinom treba upoznati svojstva grafa funkcije $f(x) = ax^2$. Važno je da učenici kroz crtanje točku po točku "osjete" parabolu. Prije rada na računalu potrebno je metodom svođenja na potpuni kvadrat uvrježbati prelazak s oblika funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ na oblik $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$. Nakon obrade nastavne jedinice na računalu sljedeći se školski sat radi crtanje grafa kvadratne funkcije olovkom na papiru, primjenjujući stečene



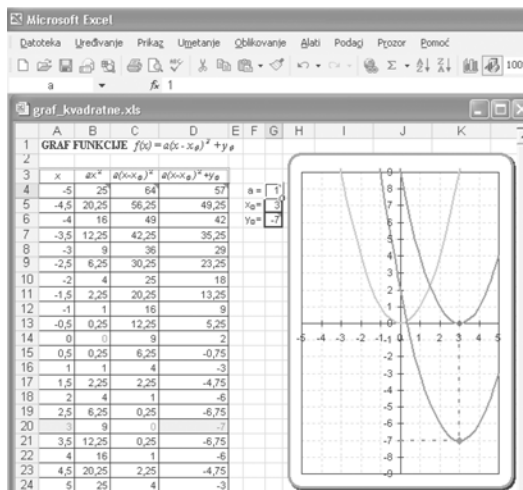
spoznaje u vježbi za računalom. Kod domaće zadaće učenicima se može dopustiti, ali ne nužno zahtijevati, jer nemaju svi na raspolaganju računalu s pisačem, da dio zadataka ispišu računalom.

Vježba napravljena u *Excelu* predviđena je za dva školska sata. Učenici bi trebali poznavati osnove rada u programu, ali snaći će se i oni koji u tom programu nikada nisu radili. U tom slučaju bi bilo dobro da nastavnik ima projektor za demonstraciju. Učenici dobivaju radni list koji daje potanke upute za rad na vježbi i traži odgovore na mnoga pitanja. Nakon obrade svakog podnaslova vježbe preporučuje se zajednički prodiskutirati odgovore i rješenja. Nastavnik bi trebao imati ulogu moderatora, koji samo propituje točnost rješenja i odgovora. Nalaženje točnih rješenja i dobro formuliranih odgovora treba prepustiti učenicima. Tijekom cijele vježbe učenici se zadržavaju na Listu 1 *Excel* dokumenta. List 2 daje samo uputu, za one koji to žele, kako da potpuno sami i od početka nacrtaju graf neke funkcije u programu, pošto je na Listu 1 crtanje grafova donekle automatizirano. List 3 ovdje služi za provjeru rješenja nekih zadataka, a može poslužiti i za obradu nastavne jedinice o utjecaju vodećeg koeficijenta i diskriminante na graf polinoma drugog stupnja. Vježba je dostupna na Internet adresi http://www.gssjd.hr/matematika/ks/graf_kvadratne.xls.

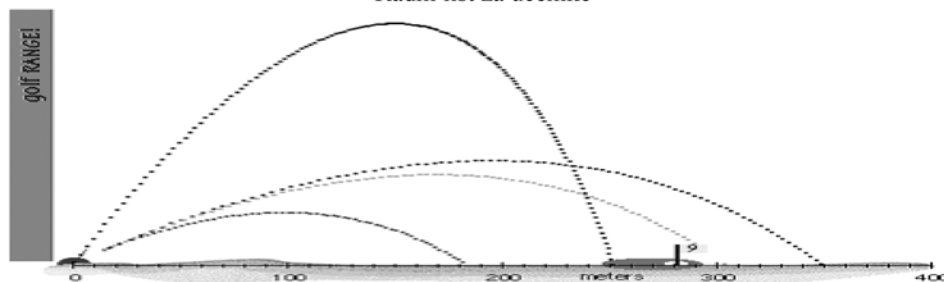
Bilo bi iluzorno očekivati da će provedba ovakvog materijala u razredu proći potpuno glatko i bez poteškoća. Ovako zamišljena nastava nosi u sebi elemente problemskog i tehnološkog pristupa odjednom, a na žalost u nastavnoj praksi ima premalo i jednog i drugog. Nastavna se praksa svih predmeta u velikoj mjeri svodi na diktiranje činjenica i na zahtjev za njihovom golom reprodukcijom. Za naš predmet porazna je realnost da učenik vrlo malo koristi udžbenik. Naravno da onda dvije stranice teksta koje stalno zahtijevaju da se nešto na računalu napravi i zaključiti mogu biti problem. No, to ne bi trebao biti

razlog da odustanemo od uvođenja promjena u nastavu. Nekim je učenicima potrebna pomoć u snalaženju s računalnim programom, a neki se muče s razumijevanjem (matematičkog) teksta. Provodeći ovako zamišljenu nastavnu jedinicu na dvjema školama, u pet gimnazijskih razreda, te probleme otklanjali smo tako da je u informatičkom kabinetu bilo nazočno po dvoje nastavnika. Učeniku je potrebno stanovito privikavanje na ovakav oblik rada. Bilo je primjetno koliko su učenici više uronili u rad kako su išli prema kraju radnog lista. Neki su učenici pokazali izuzetno razumijevanje sadržaja i brz tempo u napredovanju. S ovakvim načinom rada konačno su "došli na svoje".

Za ovako zamišljenu obradu nastavnih jedinica ne postoje baš neki već razrađeni primjeri. Ovo su pionirski koraci vođeni intuicijom. Svaka sugestija, pa i ona najmanja, koja može doprinijeti poboljšanju ovih nastavnih materijala je dobrodošla. Radni list i vježbu slobodno možete preuzeti i koristiti u razredu.



GRAF FUNKCIJE $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ Radni list za učenike



Golf loptica izbačena u igri koso u zrak gibat će se po putanji koju zovemo parabola. Oblik te parabole i doseg loptice ovisit će o sili kojom se djeluje na lopticu i kutom pod kojim je izbačena. Parabola je zapravo graf kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$. Njen oblik i položaj u koordinatnom sustavu ovise o koeficijentima a , b i c . Funkcija oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$ može se, kao što smo to već ranije učinili, svesti na oblik $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$, gdje su $x_0 = -\frac{b}{2a}$ i $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Cilj nam je istražiti utjecaj parametara a , x_0 i y_0 na oblik i položaj grafa kvadratne funkcije u računalnom programu **Excel**. Otvori vježbu **graf_kvadratne.xls**. List 1 već je djelomično uređen s oblikovanim područjem grafikona, određenim rasponom podataka i definiranim nazivima parametara, a List 2 daje potanku uputu kako da poslije potpuno sam, ako to želiš, u Excelu nacrtáš graf neke funkcije.

Graf kvadratne funkcije $f(x) = ax^2$. Graf funkcije $f(x) = ax^2$ već smo crtali u bilježnici. Ponovimo, njegova svojstva uz dinamični prikaz u *Excelu*. U stupac **[x]** unesi redom vrijednosti -5, -5.5, -4, -4.5 sve do 5. U ćeliju G4 unesi vrijednost vodećeg koeficijenta a , npr. 0.7. Oprez, u Excelu se koristi **decimalni zarez** umjesto decimalne točke! Popuni stupac **[ax²]** u skladu s danim komentarom u ćeliji B4. Dobivamo graf funkcije. Sada mijenjaj vrijednost vodećeg koeficijenta unoseći sljedeće vrijednosti: 0.5, 0.25, 1, 2, 4, -1, -0.5, -2,... i promatraj promjene koje nastaju u grafu funkcije. Odgovori na pitanja:

1. Ako je $a > 0$ (pozitivan broj), parabola je otvorena prema _____ (gore ili dolje?). ☺
2. Ako je $a < 0$ (negativan broj), parabola je otvorena prema _____ (gore ili dolje?). ☹
3. Ako je $a = 0$, parabola se pretvara u _____. ☺
4. Ako je $a > 0$, najmanja vrijednost funkcije u stupcu ax^2 je _____ u točki s apscisom _____.
5. Ako je $a < 0$, najveća vrijednost funkcije (vidi stupac ax^2) je _____ u točki s apscisom _____.
6. Tjeme parabole $y = ax^2$ uvijek je u točki (_____, _____).
7. Neke su parabole uže, a neke šire. Izrazi riječima vezu između «širine» parabole i vrijednosti vodećeg koeficijenta a . _____

Graf kvadratne funkcije $f(x) = a(x - x_0)^2$. U ćeliju G5 unesi vrijednost parametra x_0 , npr. 3. Popuni stupac **[a(x - x₀)²]** prema komentaru danom u ćeliji C4. Dobivamo novu parabolu u području grafikona! Istraži utjecaj parametra x_0 na graf funkcije mijenjajući vrijednosti parametra (npr. 4, 1.5, -1, -3...). Usput mijenjaj i vrijednost koeficijenta a .

1. Je li graf funkcije $f(x) = a(x - x_0)^2$ po svom obliku jednak grafu funkcije $f(x) = ax^2$ za svaki a , samo pomaknut ulijevo ili udesno? DA NE
2. Ako je $x_0 > 0$, dolazi do pomaka parabole $y = ax^2$ za x_0 _____, a ako je $x_0 < 0$, dolazi do pomaka za $|x_0|$ _____.



