François Viète

Marija Pavković, Zagreb

Francuski matematičar François Viète, čije je latinizirano ime Franciscus Vietaeus, a najpoznatiji je kao Vieta, rodio se 1540. g. u Fontenay–leComteu. Otac mu je bio pravnik pa je pod njegovim utjecajem studirao pravo u Poitiersu. U rodnom je gradu potom djelovao kao odvjetnik. Taj posao napušta nakon četiri godine, kada ulazi u službu kuće Soubis, gdje se između ostalog bavi i podukom. Viète se tada zanimao i za zvjezdoznanstvo, jer mu je pala na um ideja kako usavršiti Kopernikovo učenje. Odatle potječe i njegova bliska veza s Marinom Getaldićem Getaldusom, s kojim se družio i dopisivao. Astronomija je bila razlog zbog kojeg se Viète počeo zanimati za matematiku, u prvom redu trigonometriju.

Godine 1567. Viète je izabran za zastupnika u Bretagni, a od 1571. g. je pravnik pri Parlamentu u Parizu. Brzo je napredovao i uskoro postao osobni savjetnik kralja Henrika III. te osobom njegova osobita povjerenja. Ali zbog dvorskih intriga 1854. g. pada u nemilost te biva otpušten iz službe. Veći dio Vièteovih matematičkih radova potječe upravo iz tog perioda. Već 1589. g. on se vraća u službu kralja Henrika IV. U doba francusko–španjolskog rata Viète je uspio odgonetnuti španjolsku vojnu šifru. Španjolski kralj Filip II. držao je to nemogućim, bio je uvjeren kako su posrijedi *sile nečastivoga* i prijavio je Viètea papi s optužbama da je vještac.Nakon toga Viète ponovo postaje dvorskim savjetnikom i počinje pisati svoje najznačajnije djelo **In artem analyticam isagoge** (Uvod u znanost analize). Premda nedovršeno, to je djelo bilo ogroman zahvat, a u dijelovima je objavljeno 1591. godine.

Uspješno rješenje jednadžbe trećeg i četvrtog stupnja dalo je jak poticaj daljem razvitku algebre. Tako je i François Viète istraživao opće metode rješavanja algebarskih jednadžbi. Našao je opći postupak za rješavanje jednadžbe trećeg reda.

Jednadžbu oblika $x^3 + 3ax = b$ rješavao je “nadahnutom” supstitucijom $x = \frac{a}{y} - y$, prevodeći je na jednadžbu šestog stupnja oblika $y^6 + by^3 - a^3 = 0$. Iz nje je našao y, pa potom i x.

Kako bi izbjegao *casus irreducibilis*, primijenio je trigonometriju. Promatrajući jednadžbu

$$x^3 + 3px + q = 0 \tag{1}$$

uvodi novu nepoznanicu $y = mx$, gdje je m neki parametar koji će kasnije odrediti.

Tako dobiva jednadžbu

$$y^3 + 3m^2py + m^3q = 0. \tag{2}$$

Tu jednadžbu uspoređuje s trigonometrijskim identitetom

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Tako dolazi do jednadžbe

$$\cos^3\alpha - \frac{3}{4}\cos\alpha - \frac{1}{4}\cos 3\alpha = 0.$$

Stavimo li u ovu jednadžbu $y = \cos\alpha$ te $-\frac{1}{4}\cos 3\alpha = m^3 q$, dobit ćemo jednadžbu (2). Nadalje, m je realan, jer su u slučaju *casus irreducibilisa* sva tri korijena realna. Ako dakle znamo q, možemo naći i $\cos 3\alpha$, pa onda i $\cos\alpha = y$. Kako je p zadano, možemo naći i m. Pomoću džepnog kalkulatora možemo odrediti sva tri korijena jednadžbe na dovoljno mnogo decimala.

François Viète danas je ipak najpoznatiji po svojim formulama koje povezuju rješenja i koeficijente algebarske jednadžbe i koje se njemu u čast i zovu **Vièteove formule**.

Neka je dan polinom $n-$ tog stupnja $f(x) = a_n x_n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, i neka su $x_1, x_2, \ldots x_n$ korijeni tog polinoma. Tada vrijedi:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$$

Ove se formule zovu **Vièteove formule**.

Primijetimo kako za $n = 2$ imamo polinom $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ te dvije formule koje glase $x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{a_0}{a_2}$. Pritom su x_1 i x_2 korijeni danog polinoma. Te dvije formule nalazimo u II. razredu srednje škole pri obradi kvadratne jednadžbe.

No, Vièteov doprinos matematici je i širi. Tako se primjerice među prvima bavio određivanjem broja π preko beskonačnih umnožaka i dobio:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{16} \cdot \cos\frac{\pi}{32} \cdot \ldots$$

Isti izraz možemo zapisati i u obliku

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots$$

Spomenimo još kao kuriozitet da je nizozemski matematičar i liječnik Adriaan van Roomen (1561. – 1615.) izazvao matematičare da riješe jednadžbu

$$\begin{aligned} &x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12\,300x^{39} \\ &+ 111\,150x^{37} - 740\,259x^{35} + 3\,764\,565x^{33} \\ &- 14\,945\,040x^{31} + 46\,556\,700x^{29} \\ &- 117\,679\,100x^{27} + 236\,030\,652x^{25} \\ &- 378\,658\,800x^{23} + 483\,841\,800x^{21} \\ &- 488\,494\,125x^{19} + 384\,942\,375x^{17} \\ &- 232\,676\,280x^{15} + 105\,306\,075x^{13} \\ &-34\,512\,075x^{11} + 7\,811\,375x^{9} - 1\,138\,500x^{7} \\ &+ 95\,634x^{5} - 3\,795x^{3} + 45x = A, \end{aligned}$$

gdje je A zadana konstanta. Van Roomen je predložio da se ta jednadžba riješi za

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2+}}}},$$

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2-}}}},$$

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

Pokazat ćemo ovdje kako je Viète riješio tu jednadžbu za $A = \sqrt{2}$.

Viète se sjetio formule

$$\begin{aligned} 2\sin(n\alpha) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \Big[&(2\sin\alpha)^n \\ &- \frac{n}{1!}(2\sin\alpha)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!}(2\sin\alpha)^{n-4} \\ &- \frac{n(n-4)(n-5)}{3!}(2\sin\alpha)^{n-6} \\ &+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!}(2\sin\alpha)^{n-8} - \ldots \Big] \end{aligned}$$

i primijetio da se koeficijenti jednadžbe podudaraju s koeficijentima u ovoj formuli za $n = 45$. Prema tome, Van Roomen je tu jednadžbu dobio tako da u ovu trigonometrijsku formulu uvrsti x umjesto $2\sin\alpha$. No, tada je $A = 2\sin 45\alpha$. Dalje je Viète pokazao da vrijedi

$$2\sin 45\alpha = 2\sin(3\cdot 15\alpha) = 6\sin 15\alpha$$
$$-8\sin^3 15\alpha = 3(2\sin 15\alpha) - (2\sin 15\alpha)^3 =$$

dalje

$$2\sin 15\alpha = 3(2\sin 5\alpha) = 6\sin 5\alpha - 8\sin^3 5\alpha.$$

Na kraju je

$$2\sin 5\alpha = 2\sin(3\alpha + 2\alpha)$$
$$= 5(2\sin\alpha) - 5(\sin\alpha)^3 + (2\sin\alpha)^5.$$

Uvrštavanjem u formulu za $2\sin 45\alpha$ dobio je

$$(2\sin\alpha)^{45} - 45(2\sin\alpha)^{43} + \ldots$$
$$+ 45(2\sin\alpha) = 2\sin 45\alpha,$$

dakle identitet koji se u koeficijentima potpuno podudara sa zadanom jednadžbom. Za $A = \sqrt{2}$ je $2\sin 45d = \sqrt{2}$ i Viète je odredio 23 pozitivna korijena zadane jednadžbe i to s točnosti na 15 decimala. Iz $\sin 45\alpha = \sqrt{2}$ slijedi $d_k = 1^\circ + k\cdot 8^\circ$ i $\alpha_j = 3^\circ + l\cdot 8^\circ$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 12$, $j = 0, 1, 2, \ldots, 10$. Npr., za $\alpha = 38^\circ$ je $x = 2\sin 33^\circ$

$$x \approx 1{,}089\,287\,070\,030\,05.$$

François Viète umro je u Parizu 13. prosinca 1603. godine.

1+1=2 na matematički način

Ne tako davno dobio sam od prijatelja elektronskom poštom pismo u kojem se objašnjava kako jednakost $1+1=2$ *zapisati na elegantniji način:*

$$\ln e + \sin^2 x + \cos^2 x = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

No kako je i $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$, *te* $ch\,p\cdot\sqrt{1-th^2 p} = 1$, *dalje možemo pisati:*

$$\ln\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right) + \sin^2 x + \cos^2 x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{ch\,p\cdot\sqrt{1-th^2 p}}{2^n}.$$

Za transponirane i inverzne matrice vrijedi jednakost $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, *koju, promatranu u jednodimenzionalnom prostoru, možemo zapisati i kao* $\left((A^T)^{-1} - (A^{-1})^T\right)! = 1$, *što daje:*

$$\ln\left(\lim_{t\to\infty}\left((A^T)^{-1} - (A^{-1})^T\right)! + \frac{1}{t}\right) + \sin^2 x + \cos^2 x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{ch\,p\cdot\sqrt{1-th^2 p}}{2^N}.$$

Mogli bismo, naravno, nastaviti i dalje, ali mislim da je i ovo dovoljno da se pokaže da za matematičare jednakost $1+1=2$ *ima mnogo dublje značenje nego za ostale ljude.*

Želite li nekom ovo poslati e-mailom, a ne da vam se utipkavati, javite mi se na `ivan.marinovic1@zg.htnet.hr` *i poslat ću vam original koji je u Power Pointu.*

Ivan Marinović