DJELJIVOST S 11

Kako provjeriti je li zadani prirodni broj n djeljiv s 11?

Zbrojimo znamenke na neparnim mjestima broja n i taj zbroj označimo s A. Zbrojimo zatim znamenke na parnim mjestima broja n, i zbroj označimo s B. Ako je razlika $A - B$ djeljiva s 11, onda je i broj n djeljiv sa 11.

Kako to provjeriti?

Pogledajmo primjer.

Je li broj 9 743 327 djeljiv sa 11?

Za ovaj je broj $A = 7 + 3 + 4 + 9 = 23$, *a* $B = 2 + 3 + 7 = 12$.

Kako je $A - B = 23 - 12 = 11$, *dani je broj djeljiv sa 11.*

Obrazložit ćemo ovaj postupak koristeći se sljedećim činjenicama:

1) *Svaki broj koji ima paran broj znamenki, a sve su znamenke devetke, djeljiv je s 11.*
Ovu je tvrdnju lako provjeriti. Naime, svaki takav broj možemo zapisati u obliku

$$9999\ldots99 = 99 \cdot (10^{2n} + 10^{2n-2} + \ldots + 10^2) = 9 \cdot 11 \cdot 1010\ldots10.$$

2) *Svaki broj oblika* $10^{2n} - 1$ *djeljiv je sa 11.*
Ako od broja 10^{2n} *oduzmemo 1, dobit ćemo broj koji se sastoji od parnog broja devetki.*

3) *Broj oblika* $10^{2n-1} + 1$ *djeljiv je sa 11.*
Ova činjenica proistječe iz jednakosti $10^{2n-1} + 1 = 999\ldots9 \cdot 10 + 11$, *u kojoj je broj devetki paran.*

I sada se vratimo našem primjeru. Dani broj možemo raspisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
n &= 9\,743\,327 = 9 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7 \\
&= 9 \cdot (10^6 + 1 - 1) + 7 \cdot (10^5 + 1 - 1) + 4 \cdot (10^4 + 1 - 1) \\
&+ 3 \cdot (10^3 + 1 - 1) + 3 \cdot (10^2 + 1 - 1) + 2 \cdot (10 + 1 - 1) + 7 \\
&= 9 + 9 \cdot (10^6 - 1) - 7 + 7 \cdot (10^5 + 1) + 4 + 4 \cdot (10^4 - 1) \\
&- 3 + 3 \cdot (10^3 + 1) + 3 + 3 \cdot (10^2 - 1) - 2 + 2 \cdot (10 + 1) + 7 \\
&= 9 \cdot (10^6 - 1) + 7 \cdot (10^5 + 1) + 4 \cdot (10^4 - 1) + 3 \cdot (10^3 + 1) \\
&+ 3 \cdot +(10^2 - 1) + 2 \cdot (10 + 1) + (9 - 7 + 4 - 3 + 3 - 2 + 7) \\
&= \underline{9 \cdot (10^6 - 1) + 7 \cdot (10^5 + 1) + 4 \cdot (10^4 - 1)} \\
&+ \underline{3 \cdot (10^3 + 1) + 3 \cdot (10^2 - 1) + 2 \cdot (10 + 1)} + (9 - 7 + 4 - 3 + 3 - 2 + 7).
\end{aligned}$$

Podvučeni je zbroj djeljiv s 11, jer je svaki njegov pribrojnik djeljiv s 11. A da bi broj 9 743 327 bio djeljiv s 11, s 11 mora biti djeljiv i pribrojnik u zagradi, a to je broj

$$9 - 7 + 4 - 3 + 3 - 2 + 7 = (9 + 4 + 3 + 7) - (7 + 3 + 2).$$

Taj broj je razlika zbroja znamenki na parnim i neparnim pozicijama u zapisu broja, on je djeljiv sa 11, pa je i broj 9 743 327 djeljiv s 11.

Sada neće biti teško provjeriti da ovaj kriterij djeljivosti vrijedi općenito.

Vinko Bajrović, Split