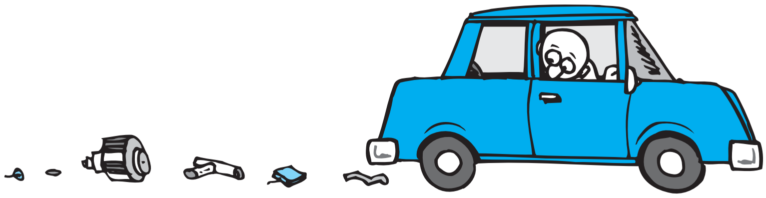


Zaustavni put vozila

Sonja Banić, Zagreb

Svjedoci smo da mladi ljudi, naši bivši ili sadašnji učenici, često izazivaju i stradavaju u teškim prometnim nesrećama. Pitala sam se znaju li oni koliko im metara više treba da stanu kad malo jače pritisnu papučicu gasa? Jesu li to ikada izračunali? Pa na matematici vježbaju računanje. Zašto naši učenici ne bi, umjesto dosadnih zadataka s decimalnim brojevima, računali zaustavni put vozila? Možda će se bar neki od njih kad polože vozački ispit prisjetiti rezultata tih zadataka i maknuti nogu s gasa.

Zaustavni put vozila sastoji se od puta reagiranja i puta kočenja. Put reagiranja je put koji automobil prijeđe za vrijeme potrebno vozaču da reagira na prepreku i vrijeme potrebno sustavu za kočenje da počne djelovati. Put reagiranja linearno ovisi o brzini (jednoliko gibanje). Put kočenja je put koji automobil prijeđe za trajanja kočenja. On ovisi o kvadratu brzine (akcelerirano gibanje). Na put kočenja utječu i uvjeti na cesti: kvaliteta kolnika, vremenski uvjeti i uspon ili nizbrdica. Radi jasnoće i jednostavnosti u zadacima sam zanemarila vrijeme reagiranja sustava za kočenje (jer je za osobne automobile oko 10 puta manje od vremena reagiranja vozača) i pretpostavila da se svi primjeri odvijaju na ravnoj cesti, bez uspona i nizbrdica.

Za izračunavanje zaustavnog puta koristimo sljedeće podatke i formule:

s_z – zaustavni put vozila (m);
s_r – put reagiranja (m);
s_k – put kočenja (m);
v – brzina vozila (km/h);
t_r – vrijeme reagiranja vozača (s);
μ – koeficijent trenja ovisan o podlozi.

$$s_z = s_r + s_k, \qquad s_r = \frac{v \cdot t}{3.6},$$
$$s_k = \frac{v^2}{254\mu}, \qquad s_z = \frac{v \cdot t_r}{3.6} + \frac{v^2}{254\mu}.$$

Prosječno vrijeme reagiranja vozača je od 0.8 do 1.2 sekunde. Ako je vozač pod utjecajem alkohola ili jako umoran, vrijeme reagiranja se povećava na 1.5 do 1.8 sekundi.

Koeficijent trenja μ:

	suh	mokar
asfalt nov	0.7–0.8	0.5–0.6
asfalt star, prljav	0.6–0.7	0.25–0.45
šljunak, sitan kamen	0.6–0.7	0.3–0.5
snijeg ugažen	0.2–0.4	
led	0.05–0.1	

U prvom razredu, kod vježbanja računanja s decimalnim brojevima, možemo napraviti zadatke 1 i 2.

Zadatak 1. Koliki je zaustavni put vozila na suhom, starom asfaltu ($\mu = 0.6$) ako je vrijeme reagiranja vozača 1 sekunda, a vozi brzinom od:
a) 50 km/h; b) 80 km/h; c) 100 km/h?

Rješenje. a) $s_z = \dfrac{50 \cdot 1}{3.6} + \dfrac{50^2}{254 \cdot 0.6} =$ 30.29 m; b) 64.22 m; c) 93.39 m.

Zadatak 2. Vozač je iznenada, na otprilike 60 m ispred sebe ugledao zaustavljeno vozilo. Hoće li uspjeti stati ako je:
a) vrijeme reagiranja vozača 1.1, asfalt mokar ($\mu = 0.4$) i brzina vozila 60 km/h;

b) vozač alkoholiziran ($t_r = 1.6$), asfalt mokar ($\mu = 0.4$) i brzina vozila 60 km/h;
c) vrijeme reagiranja vozača 0.9, asfalt mokar ($\mu = 0.6$) i brzina vozila 90 km/h;
d) vrijeme reagiranja vozača 0.9, asfalt suh ($\mu = 0.6$) i brzina vozila 90 km/h?

Rješenje. a) 53.77 m; b) 62.1 m; c) 102.22 m; d) 75.65 m.

Budući da zaustavni put ovisi o kvadratu brzine, primjere možemo iskoristiti kod kvadratne funkcije i kvadratne jednadžbe u drugom razredu. Zapravo, sljedeća dva primjera daju nam krasan odgovor na pitanja tipa: zašto proučavati kvadratnu funkciju (*Gdje se to koristi?*) i čemu služe kvadratne jednadžbe (*Komu to uopće treba?*). Mislim da bi primjere 1 i 2 bilo najbolje iskoristiti kao uvodne, motivacijske primjere.

Primjer 1. Vozimo se u idealnim uvjetima: vrijeme reagiranja vozača 0.9, asfalt suh i nov ($\mu = 0.8$). Iznenada se 40 m ispred nas pojavi prepreka. Koja je najveća brzina kojom smijemo voziti, a da se uspijemo na vrijeme zaustaviti?

Ovdje je nepoznata brzina v! Kad sve podatke uvrstimo u formulu, dobivamo kvadratnu jednadžbu:

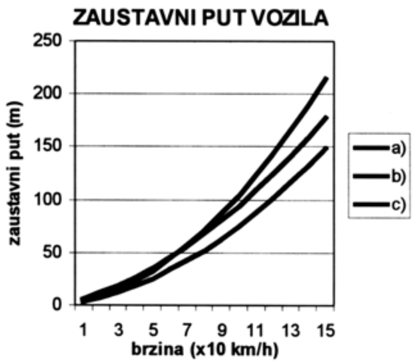
$$40 = 0.25v + 0.004921v^2,$$
$$0.004921v^2 + 0.25v - 40 = 0.$$

Koristimo li ovo kao motivacijski primjer, ovdje možemo stati i reći: u idućih nekoliko sati naučit ćemo rješavati ovakve jednadžbe. Nakon što učenici nauče formulu za rješavanje kvadratne jednadžbe, vratimo se na uvodni primjer i riješimo jednadžbu.

Rješavanjem jednadžbe pomoću formule dobivamo da je tražena brzina 68.26 km/h.

Primjer 2. Tablično i grafički prikaži ovisnost zaustavnog puta o brzini ako je:
a) asfalt suh i nov ($\mu = 0.8$) i vrijeme reagiranja vozača 0.9;
b) asfalt suh i nov ($\mu = 0.8$) i vrijeme reagiranja vozača 1.6;
c) cesta mokra ($\mu = 0.5$) i vrijeme reagiranja vozača 0.9.

v(km/h)	s_z(m) a)	b)	c)
10	2.99	4.94	3.29
20	6.97	10.86	8.15
30	11.93	17.76	14.59
40	17.87	25.65	22.6
50	24.8	34.52	32.19
60	32.72	44.38	43.35
70	41.61	55.22	56.08
80	51.49	67.05	70.39
90	62.36	79.86	86.28
100	74.21	93.65	103.74
110	87.04	108.43	122.78
120	100.86	124.2	143.39
130	115.66	140.94	165.57
140	131.45	158.67	189.33
150	148.22	177.39	214.67



Učenici bi svakako trebali sami izračunavati podatke u tablici. Bilo bi dobro i malo o njima popričati. Učenici bi trebali uočiti da kod velikih brzina i malo povećanje brzine nosi veliko povećanje zaustavnog puta. Kad se podaci prikažu grafički, očito se ne dobiva pravac, već dio parabole.

Možda će vam se u ovim primjerima činiti nezgodno što treba utrošiti malo više vremena na uvođenje formule za zaustavni put i parametara koji se u njoj javljaju. No ovi primjeri omogućuju da direktno povežemo nastavno gradivo sa stvarnim životom, i time bitno pridonose motivaciji učenika. S druge strane, nepromišljenost mladih vozača svake godine odnosi desetke mladih života. Da se to spriječi treba se truditi svim silama, pa zašto ne i na nastavi matematike?

Literatura

[1] Vlasta Perotić, *Prometna tehnika 1*, Škola za cestovni promet, Zagreb, 1994.

* * *

Kako izračunati sin nx i cos nx?

Kako izračunati $\sin nx$ ili $\cos nx$, ako je n neki cijeli broj?

Evo odgovora:

Ispišite n-ti redak *Pascalova trokuta*. Brojevima toga retka pripišite redom $\cos^n x$, $\cos^{n-1} x \cdot \sin x$, $\cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x, \ldots, \sin^n x$. Neka u jednom retku zatim ostanu članovi koji su zapisani na neparnim pozicijama, a one na parnim pozicijama preselimo u redak niže (vidi sliku!). U svakom od ova dva retka zapišite minus ispred članova koji su na drugom, četvrtom, šestom, i općenito parnom mjestu, a plus ispred onih koji su treći, peti, sedmi, te općenito neparni po redu.

$$
\begin{aligned}
\cos x &= 1 \cos x\\
\sin x &= 1 \sin x\\
\cos 2x &= 1 \cos^2 x - 1 \sin^2 x\\
\sin 2x &= 2 \cos x \sin x\\
\cos 3x &= 1 \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x\\
\sin 3x &= 3 \cos^2 x \sin x - 1 \sin^3 x\\
\cos 4x &= 1 \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + 1 \sin^4 x\\
\sin 4x &= 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x\\
\cos 5x &= 1 \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x\\
\sin 5x &= 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + 1 \sin^5 x
\end{aligned}
$$

I sada je u jednom retku zapisan izraz za $\cos nx$, a u drugom izraz za $\sin nx$. Primjerice, drugi redak će izgledati ovako:

$$\cos^2 x \qquad 2\cos x \cdot \sin x \qquad \sin^2 x.$$

Tako onda za $n = 2$ imamo: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, te $\sin 2x = \sin x \cdot \cos x$.

Za $n = 3$ nalazimo

$$\cos^3 x \qquad 3\cos^2 x \cdot \sin x \qquad 3\cos x \cdot \sin^2 x \qquad \sin^3 x.$$

Dakle je: $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \cdot \sin^2 x$, a $\sin 3x = 3\cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x$.

Formule za $\sin nx$ ili $\cos nx$ do kojih dolazimo na opisani način valja provjeriti *matematičkom indukcijom*.

Korijeni gore opisanog postupka zapravo su u *Moivreovoj formuli*

$$(\cos nx + i \sin nx)^n = \cos nx + i \sin nx.$$

Napomenimo na kraju kako je ovo vrlo lijep primjer povezivanja gradiva u nastavi matematike (trigonometrija, binomni poučak i kompleksni brojevi).