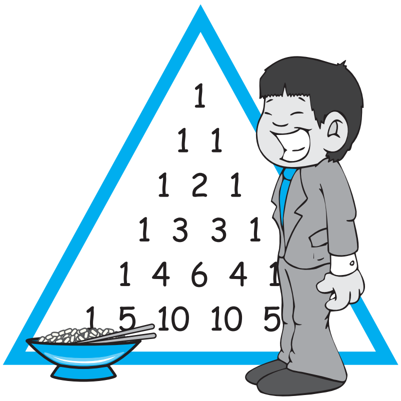
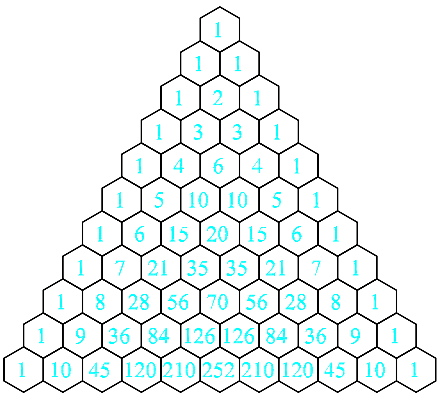


Pascalov ili kineski trokut

Šime Šuljić, Pazin

Shema brojeva, poznata pod nazivom Pascalov trokut, bila je poznata puno ranije nego što ju je slavni matematičar i poznati mislilac prikazao u raspravi *"Traktat o aritmetičkom trokutu"*. Djelo je posmrtno objavljeno 1665. godine. O trokutu su prije toga pisali njemački matematičar Petrus Apianus 1527. godine i Talijan Nicolo Tartaglia 1556. Indijci su ga poznavali dva stoljeća prije Krista.

Prema programu nastave matematike, pojam i neka svojstva Pascalovog trokuta obrađuju se u četvrtom razredu srednje škole. Prije toga učenik se s njim može sresti tek uzgred. Tako ga nalazimo u prošlogodišnjem testu za četvrti i peti razred osnovne škole međunarodnog matematičkog natjecanja *Klokan bez granica*. U osnovi, on predstavlja shemu brojeva prikazanu na slici 1., koju, otkrijemo li algoritam, lako možemo nastaviti unedogled. Pascalov trokut ima vrlo zanimljiva svojstva, zbog kojih ga se učeniku isplati približiti.



Slika 1.

Prirodni brojevi

Na krakovima trokuta nalaze se sve same jedinice. Niz njima susjednih brojeva čini skup svih prirodnih brojeva (slika 2.).

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Slika 2.

Potencije broja 2

Zbroj brojeva u pojedinom retku Pascalovog trokuta daje potenciju broja dva. Tako je:

1. red jednak $1 = 2^0$;
2. red jednak $1 + 1 = 2^1$;
3. red jednak $1 + 2 + 1 = 2^2$;
4. red jednak $1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$ itd.

Posljednji red na slici 1. je

$$1{+}10{+}45{+}120{+}210{+}252{+}210{+}120$$
$$+45{+}10{+}1 = 1024 = 2^{10}.$$

Potencije broja 11

Promatramo li brojeve jednog retka kao znamenke jednog broja, dolazi se do zanimljivog otkrića da se radi o potencijama broja 11. Tako je $1 = 11^0$, $11 = 11^1$, $121 = 11^2$, $1331 = 11^3$ i $14641 = 11^4$. Od šestog reda nadalje dvoznamenkaste brojeve treba čitati ponešto drugačije. 11^5 je 161 051, što je zapravo:

$$1{\cdot}10^5{+}5{\cdot}10^4{+}10{\cdot}10^3{+}10{\cdot}10^2{+}5{\cdot}10^1{+}1{\cdot}10^0$$
$$= 100000{+}50000{+}10000{+}1000{+}50{+}1$$
$$= 161051.$$

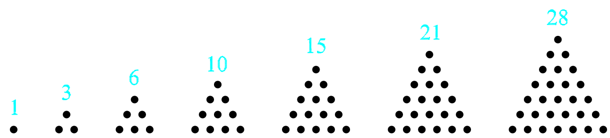
Redak 1 5 10 10 5 1 mogao se čitati i ovako:

$$1(5+1)(0+1)051 \text{ tj. } 161\,051.$$

Na taj bi način redak 1 6 15 20 15 6 1 čitali kao $1(6+1)(5+2)(0+1)561$ ili 1 771 561, što je 11^6.

Figurativni brojevi

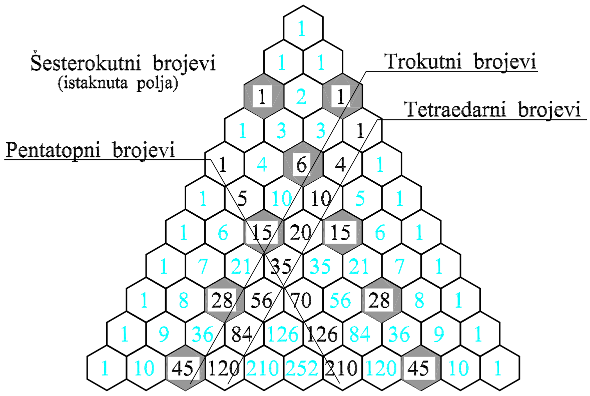
Stari su Grci posebnu pažnju posvećivali figurativnim brojevima. To su brojevi koji se mogu pravilno rasporediti po stranicama i unutrašnjosti pravilnih poligona. Tako imamo trokutne, četverokutne, peterokutne i šesterokutne brojeve. Na slici 3. prikazani su **trokutni** brojevi.



Slika 3.

Niz trokutnih brojeva nalazimo u Pascalovom trokutu tik do niza prirodnih brojeva (slika 4.). Inače, formula općeg člana niza trokutnih brojeva je:

$$T(n) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

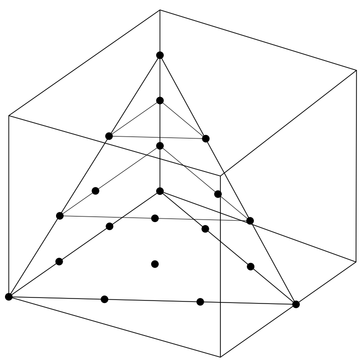


Slika 4.

Tetraedarni brojevi 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84,... zapravo predstavljaju niz parcijalnih suma trokutnih brojeva. U trokutu ih nalazimo na mjestu četvrte “dijagonale”. Opći član tog niza brojeva je:

$$T(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Geometrijski se ti brojevi mogu prikazati kao pravilno raspoređene točke po bridovima, stranama i u unutrašnjosti tetraedra (slika 5).



Slika 5.

Šesterokutni brojevi

Šesterokutni brojevi su 1, 6, 15, 28, 45,.... Geometrijski se mogu pravilno rasporediti po stranama i u unutrašnjosti pravilnog šesterokuta. Na slici 4. istaknuta su polja šesterokutnih brojeva. Naravno, svaki je šesterokutni broj ujedno i trokutni broj. Opći član niza šesterokutnih brojeva dan je formulom:

$$T(n) = n(2n - 1).$$

Pentatopni brojevi

Pentatopni brojevi su 1, 5, 15, 35, 70, 126,.... U Pascalovom trokutu čine petu "dijagonalu", a formula općeg člana glasi:

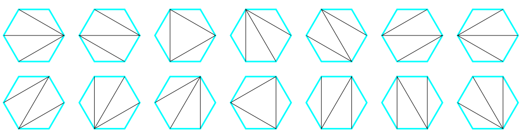
$$T(n) = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Catalanovi brojevi

Catalanovi brojevi kazuju na koliko se različitih načina pojedini poligon može po dijagonalama podijeliti na trokute, a da se one ne sijeku. Priložena tablica kazuje na koliko je načina to moguće napraviti za prvih sedam poligona:

Broj strana poligona	Broj različitih načina
3	**1**
4	**2**
5	**5**
6	**14**
7	**42**
8	**132**
9	**429**

Za ilustraciju su na slici 6. prikazane sve različite diobe šesterokuta na trokute.



Slika 6.

Ovi brojevi zovu se prema Belgijancu Eugenu Charlesu Catalanu (1814. – 1894.), iako on nije prvi riješio ovaj problem. Jan Andrej Segner riješio je problem u XVII. stoljeću, a pojednostavnili su ga Euler i Binet.

Formula za rješenje problema je:

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}.$$

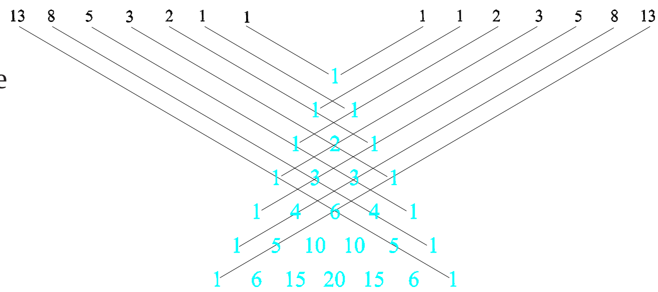
Catalanove brojeve u Pascalovom trokutu nisu uočljivi na prvi pogled. Oni se dobivaju razlikom odgovarajućih parova brojeva u odabranim stupcima. Na slici 7. istaknuti su podebljanjem dvaju stupaca. Razlika brojeva tih stupaca u istom retku predstavlja Catalanove brojeve. Isto vrijedi i za stupce istaknute kurzivom.

1
1 *1*
1 2 - 1
1 3 *3* - *1*
1 4 6 - 4 1
1 5 10 *10* - *5* 1
1 6 15 20 - 15 6 1
1 7 21 35 *35* - *21* 7 1
1 8 28 56 70 - 56 28 8 1

Slika 7.

Fibonaccijevi brojevi

Kada se u Pascalovom trokutu uoči da je moguće "izvući" i Fibonaccijev niz, to svemu daje obol mističnosti. Na slici 8. istaknute su dijagonale po kojima treba zbrajati brojeve Pascalavog trokuta. Niz tih suma predstavlja Fibonaccijev niz.



Slika 8.

Podsjetimo da je talijanski matematičar Leonardo iz Pise zvan Fibonacci 1202. godine u knjizi *Liber abaci* zabilježio čuveni zadatak o zečevima:

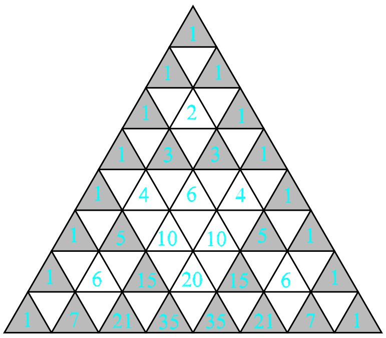
Par zečeva okoti svaki mjesec jedan par zečeva. Mladi par zečeva nakon dvomjesečnog sazrijevanja koti svaki mjesec novi par zečeva. Koliko će parova biti nakon n mjeseci?

Pokazalo se da niz brojeva koji daje odgovor na ovo pitanje ima mnoga zanimljiva svojstva koja nisu samo odgovor na pitanje razbibrige. Članovi niza povezani su s nekim prirodnim pojavama i zlatnim rezom. Svaki član niza, počevši od trećeg, je zbroj svog prethodnika i njegovog prethodnika. Daniel Bernoulli našao je početkom 18. stoljeća formulu za n-ti član niza:

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

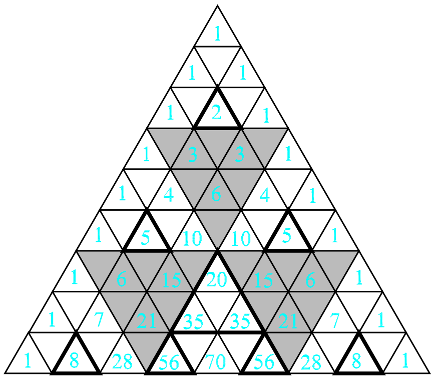
Trokut Sierpinskog

U Pascalovom trokutu pomiješani su parni i neparni brojevi. Da li ih je ikako moguće strogo razdvojiti? Odgovor je potvrdan, a kao "skalpel" poslužit će jednakostraničan trokut Sierpinskog. Trokut Sierpinskog je trokut kojem je "izvađen" trokut omeđen srednjicama, a u preostalim su trokutima ponovo "izvađeni" trokuti omeđeni srednjicama i tako dalje. Ako trokutom Sierpinskog prekrijemo Pascalov trokut, kroz "šupljine" ćemo vidjeti parne brojeve i prekriti neparne (slika 9.).



Slika 9.

Pri dijeljenju s tri prirodni brojevi daju ostatak 0, 1 ili 2. Na slici 10. siva polja ističu brojeve djeljive s 3, a podebljane crte izdvajaju brojeve oblika $3k+2$ $(k = 0, 1, 2\ldots)$. Svi ostali brojevi su oblika $3k+1$ $(k = 0, 1, 2\ldots)$.



Slika 10.

Binomni koeficijenti

U matematičkom gradivu za srednje škole Pascalov se trokut veže uz binomni poučak. Podsjetimo se da je:

$(x+y)^0 = 1$

$(x+y)^1 = 1x + 1y$

$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$

$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$

$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$

$(x+y)^5 = 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5.$

Dakle, koeficijenti u ovim izrazima predstavljaju pojedini redak Pascalovog trokuta. Ti koeficijenti nazivaju se **binomni koeficijenti** i označavaju se izrazom $\binom{n}{k}$, gdje n predstavlja broj retka, a k broj koeficijenta u retku. Valja imati na umu da k počinje nulom. Binomni koeficijent definira se za n i k prirodne brojeve i $k \leq n$ ovako:

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k},$$

za $k \geq 1$. Za $k = 0$ uzima se da je vrijednost binomnog koeficijenta 1. Tako je vrijednost binomnog koeficijenta $\binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56$, a u Pascalovom trokutu nalazimo ga na četvrtom mjestu devetog retka. Za binomne koeficijente vrijedi svojstvo simetričnosti, tj. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Stoga su i retci Pascalovog trokuta simetrični. Za Pascalov trokut temeljno je svojstvo ono koje uočavamo zbrojivši dva susjedna koeficijenta. Tako je na primjer:

$$\binom{6}{2}+\binom{6}{3}=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}+\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}.\left(1+\frac{4}{3}\right)=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$=\binom{7}{3}.$$

Moglo bi se dokazati i da vrijedi općenito:

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k},$$

što zapravo znači da u Pascalovom trokutu novi element dobivamo zbrojivši dva elementa prethodnog retka koji su lijevo i desno od njega. Izuzetak su rubovi na kojima su uvijek jedinice.

Binomni koeficijent ima i kombinatoričko značenje. Za primjer, postavimo pitanje na koliko načina iz skupa od četiri različita elementa $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ možemo izabrati po dva elementa. Odgovor je na šest načina: $\{\clubsuit, \diamondsuit\}$, $\{\clubsuit, \heartsuit\}$, $\{\clubsuit, \spadesuit\}$, $\{\diamondsuit, \heartsuit\}$, $\{\diamondsuit, \spadesuit\}$, $\{\heartsuit, \spadesuit\}$. Riječ je o binomnom koeficijentu $\binom{4}{2}=6$. Slično se i listić lutrije na kojem treba prekrižiti sedam od 39 brojeva može ispuniti na $\binom{39}{7}=15\,380\,937$ načina.

Namjera ovog članka nije bila dokazivati matematičke tvrdnje, već istaknuti čitav niz zanimljivosti koje se pojavljuju uz Pascalov trokut, što u nastavi matematike može biti jako motivirajuće. Za samo izračunavanje pojedinih redaka Pascalovog trokuta čak se i kalkulator može pokazati kao nedovoljan i spor alat. Stoga bi učenicima mogla biti vrlo zanimljiva posjeta web adresi `http://mathforum.org/dr.cgi/pascal.cgi` gdje će im biti ispisan željeni broj redaka.

`sime.suljic@pu.hinet.hr`

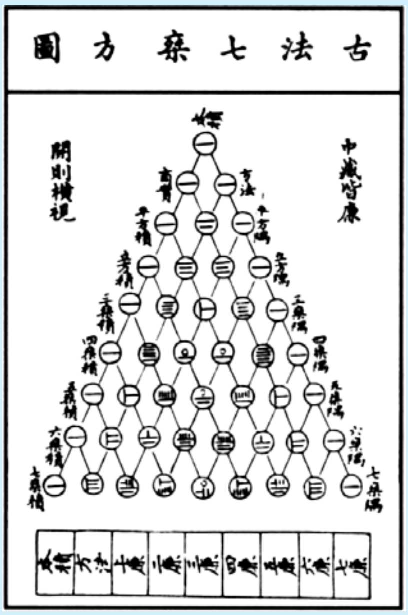
Literatura

[1] Dakić, Branimir, *Matematički panoptikum*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[2] Elezović, Neven, *Matematika 4*, Element, Zagreb 1996.

[3] Gusić, Ivica, *Matematički rječnik*, Element, Zagreb 1995.

[4] URL adresa `http://mathforum.org/workshops/usi/pascal/pascal_hsdisc.html`



Premda danas poznat kao Pascalov, taj trokut s binomnim koeficijentima naziva se ponekad i kineski. Neki naime vjeruju da njegova prva pojava potječe iz 1303. godine te da ga je otkrio kineski matematičar Zhu Shijie koji ga je i objavio u svojem djelu Siyuan yujian. Na slici vidimo njegovu verziju trokuta. No u njoj se može uočiti jedna greška. Možete li je otkriti?