

Pismeni ispiti iz matematike na maturi



Ljetni rok, šk. god. 2002./2003.

**Gimnazija Andrije Mohorovičića,
Rijeka**

1. a) Napiši bez znaka korijena i znaka apsolutne vrijednosti funkciju i nacrtaj njen graf:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)^2}}.$$

b) Za koje $m \in \mathbf{R}$ je nejednakost $\frac{(m+2)x - 3m}{x^2 + 1} < 1$ ispunjena za sve $x \in \mathbf{R}$?

c) Riješi nejednadžbu $\frac{3 \sin x - 2}{4 \sin^2 x - 1} < 1$.

2. Za $z_0 \in \mathbf{C}$ vrijedi: $z_0 \cdot \overline{z_0} - z_0 - |z_0|^2 = 1 - i$

a) Odredi z_0 .

b) Odredi skup točaka z kompleksne ravnine određene uvjetom $|z_0 + z| < 4$ i prikaži u Gaussovoj ravnini.

c) Riješi jednadžbu $z^5 + z_0 = 0$.

3. Dana je funkcija $f(x) = x + 2$.

a) Odredi domenu funkcije $g(x) = 2\sqrt{f(x)}$.

b) Odredi presjecišta grafa funkcije $h(x) =$

$\ln f(x)$ s koordinatnim osima i nacrtaj graf. Odredi interval u kojem je funkcija $h(x)$ negativna.

c) Odredi domenu funkcije $s(x) = \ln |f(x)|$.

4. Stranice trokuta čine aritmetički niz čija je razlika 2, a najveći kut trokuta je $\gamma = 120^\circ$.

a) Izračunaj oplošje i volumen tijela koje nastaje rotacijom trokuta oko pravca paralelnog s najduljom stranicom u udaljenosti od nje jednakoj visini na tu stranicu, a koji ne prolazi vrhom suprotnog kuta.

b) Zadanom trokutu upisan je trokut s vrhovima na polovištima stranica zadanog, ovome je upisan novi trokut na isti način, itd. Izračunaj sumu svih površina ovako nastalih trokuta.

5. Dana je funkcija $f(x) = 2x^3 + 3x^2$.

a) Odredi nultočke i ekstreme funkcije i nacrtaj njen graf.

b) Izračunaj površinu lika kojeg omeđuje graf funkcije s apscisnom osi.

c) Izračunaj kut pod kojim graf dane funkcije siječe pravac na kojem leže točke $A(-1, 8)$ i $B(3, 2)$.

III. gimnazija, Osijek

1. Koeficijenti funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ pozitivni su realni brojevi sa svojstvima:

- a) zbroj im je 29;
- b) ako se c uveća za 20, čine geometrijski niz;
- c) ako se b umanji za 4, a c uveća za 5, dobijemo tri uzastopna člana aritmetičkog niza.

2. Zadan je trokut ABC sa stranicom $c = 12$ cm i kutovima uz tu stranicu $\alpha = 54^\circ$, $\beta = 74^\circ$. Odredi obujam i oplošje tijela koje nastaje rotacijom trokuta oko pravca koji prolazi vrhom C i paralelan je sa stranicom c .

3. Zadan je kompleksni broj

$$z = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1 + (\sqrt{2} + 1)i}{\sqrt{2} + i}.$$

- a) Napiši algebarski zapis broja z .
- b) Izračunaj $|z|$.
- c) Napiši trigonometrijski zapis broja z .
- d) Izračunaj z^8 .

4. Pravac $x - 2y + 8 = 0$ je zajednička tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i s njom konfokalne parabole $y^2 = 2px$ (elipsa i parabola imaju zajednički fokus).

- a) Kako glase jednačbe elipse i parabole?
- b) Napiši jednačbu kružnice kojoj dirališta zadanog pravca i zadanih krivulja određuju promjer.
- c) Pokaži da tako dobivena kružnica prolazi zajedničkim fokusom elipse i parabole.

5. Izračunaj vrijednost izraza:

$$\left(\frac{9 - 2\sqrt{14}}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{9 + 2\sqrt{14}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}\right)^2.$$

III. gimnazija, Split

1. Odredi $x \in \mathbf{R}$ tako da je

- a) $2^{2x^2+1} - 2^{x^2} + 2^{-x^2} = 2$;
- b) $\frac{|\ln^2 x - 1|}{\ln^2 x - 1} = 1$;
- c) $\sqrt{x^2 - 5x - 6} < x - 3$;
- d) $\arccos^2 x < \frac{\pi^2}{9}$.

2. Opseg jednakokračnog trapeza je 24 cm. Neka je a veća i c manja osnovica trapeza. Trapez rotira oko osnovice a , zatim oko osnovice c . Volumen tako dobivenih rotacijskih tijela odnose se kao 3 : 4, a oplošja kao 3 : 5. Odredi stranice tog trapeza.

3. Na elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ kojoj su duljine poluosi a i b u omjeru 5 : 1 povučena je tangenta u njezinoj točki $D\left(-3, \frac{4}{5}\right)$. Za koji kut treba zarotirati tu tangentu oko njezina sjecišta s osi apscisa kako bi postala tangenta središnje kružnice kojoj je polumjer jednak velikoj poluosi elipse?

4. U trokut čija je osnovica $2a$, a kutovi na osnovici su cjelobrojna rješenja sustava jednačbi $25^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 y} = 8$, $25^{1-\cos 2x} + 9^{1+\cos 2y} = 34$ upisuju se krugovi koji se dodiruju, a središta im se nalaze na visini v_0 trokuta. Izračunaj zbroj površina svih tako upisanih krugova.

5. Ispitaj funkciju $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$ po svim elementima i nacrtaj njezin graf.

V. gimnazija, Zagreb

1. Riješi jednađbe i nejednađbu:

a) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{x+1}$;

b) $125 > \left(\frac{1}{5}\right)^{x(x+1)}$;

c) $\log_{16} x + \log_8 x + \log_2 x = \frac{19}{36}$;

d) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$.

2. Jednađbom $f(x) = 2x^2 - mx - m - 2$, $m \in \mathbf{R}$, dan je skup polinoma drugog stupnja.

a) Dokaži da svi polinomi ovog skupa imaju realne korijene (nultočke).

b) Koji od ovih polinoma ima najmanju vrijednost -2 ?

c) Za koje su $m \in \mathbf{R}$ oba korijena (nultočke) polinoma negativni brojevi?

d) Odredi skup točaka ravnine što ga čine tjemena parabola koje su grafovi danih polinoma.

3. Trokut ABC ($|AB| = 5\sqrt{3}$ cm, $\gamma = 60^\circ$, $|BC| = 2 \cdot |AC|$) rotira oko pravca paralelnog sa stranicom $\overline{AB}$ (izvan trokuta) i udaljenog za 2 cm od stranice $\overline{AB}$.

a) Nađi $|AC|$, $|BC|$ i α .

b) Izračunaj oplošje i obujam (volumen) nastalog rotacijskog tijela.

4. Na elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ povučene su tangente iz točke $T(4, 0)$. Udaljenost između sjecišta tih tangenti s osi y iznosi 4. Elipsa prolazi točkom $A(2, 0)$.

a) Napiši jednađbu elipse.

b) Napiši jednađbu parabole $y^2 = 2px$ kojoj se fokus poklapa s desnim fokusom elipse.

c) Nađi točke presjeka elipse i parabole.

d) Izračunaj kut između parabole i elipse.

5. Zadana je funkcija $f(x) = \frac{4-2x}{x^2}$. Ispitaj tijek te funkcije i nacrtaj joj graf.

I. gimnazija, Zagreb

1. Svježe smokve sadrže 85% vode, a suhe 12%. Koliko se suhih smokava dobije sušenjem 110 kg svježih?

2. Dana je kvadratna jednađba $p(x+1)^2 = x-1$, u kojoj je p realan parametar.

a) Odredi p uz uvjet da su rješenja jednađbe realni brojevi.

b) Za koji je p zbroj recipročnih vrijednosti jednađbe veći od 1?

c) Za koji su p rješenja jednađbe suprotni brojevi?

3. Riješi nejednađbu: $6 \cdot 9^x - 5 \cdot 12^x < 4 \cdot 16^x$.

4. Odredi područje definicije realne funkcije $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \frac{2x+1}{3-x}}$.

5. Riješi jednađbu: $\sin 3x \cdot \sin x - \cos 3x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$.

6. Odredi jednađbu kružnice opisane trokutu čije stranice leže na pravcima $x+2y+2=0$, $3x+y-9=0$ i $3x-4y+6=0$.

7. Pod kojim se kutom sijeku krivulje $y^2 - 4x = 0$ i $4x^2 - 3y^2 = 16$? Nacrtaj sliku!

8. Omjeri duljina stranica trokuta su $a : b = 2 : 3$, $b : c = 5 : 8$. Ako je opseg trokuta 9.8 cm, kolike su duljine njegovih stranica i koliki su mu kutovi?

9. Površina plašta uspravnog stošca četiri je puta veća od površine njegove osnovke.

a) Koliki je prikloni kut izvodnice prema osnovci stošca?

b) Koliki je središnji kut u mreži ovog stošca?

10. Dijagonala pobočke pravilne šesterostrane prizme s ravninom osnovke prizme zatvara kut od 75° . Koliki je kut između kraće i dulje prostorne dijagonale koje su povučene iz istog vrha na osnovci ove prizme?