Geometrijski dokaz
nejednakosti sredina

Ilija Ilišević, *Osijek*

Za n-torku pozitivnih realnih brojeva $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ definiramo aritmetičku, geometrijsku, harmonijsku i kvadratnu sredinu redom sa:

$$\begin{aligned} A(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \\ G(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \\ H(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}, \\ K(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}. \end{aligned}$$

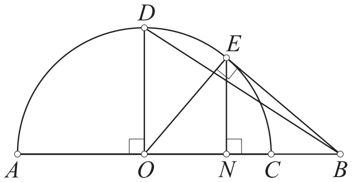
Vrijedi:

$$\begin{aligned} &H(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq G(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ &\quad \leq A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq K(a_1, a_2, \ldots, a_n), \end{aligned}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Pomoću jedne ćemo slike dati geometrijski dokaz nejednakosti sredina za slučaj $n = 2$. Jednostavnosti radi, umjesto a_1 i a_2 pisat ćemo a i b. Ako je $a = b$, odmah se vidi da je $H(a, b) = G(a, b) = A(a, b) = K(a, b)$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $a > b$.

Nacrtajmo dužinu $\overline{AB}$, $|AB| = a$, a zatim na toj dužini odaberimo točku C tako da je $|CB| = b$. Nad dužinom $\overline{AC}$, kao promjerom, konstruirajmo polukružnicu središta O. U točki O povucimo okomicu koja polukružnicu siječe u točki D, a iz točke B povucimo tangentu na polukružnicu koja polukružnicu dodiruje u točki E. Nožište okomice iz točke E na promjer $\overline{AC}$ označimo s N.



Tada je:

$$\begin{aligned} |AC| &= a - b, \\ |OC| &= |OD| = |OE| = \frac{1}{2}(a - b), \\ |OB| &= |OC| + |CB| = \frac{1}{2}(a - b) + b \\ &= \frac{1}{2}(a + b) = A(a, b). \end{aligned}$$

Primijenimo Pitagorin poučak na trokute BDO i OBE pa imamo, redom,

$$|BD| = \sqrt{|OB|^2 + |OD|^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = K(a, b),$$

$$|BE| = \sqrt{|OB|^2 - |OE|^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2} = \sqrt{ab} = G(a, b).$$

Iz pravokutnog trokuta OBE prema Euklidovom poučku imamo $|BE|^2 = |OB| \cdot |NB|$, odakle je $|NB| = \dfrac{|BE|^2}{|OB|} = \dfrac{ab}{\frac{1}{2}(a + b)} = \dfrac{2ab}{a + b} = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = H(a, b)$.

Kako je u pravokutnom trokutu hipotenuza najdulja stranica, slijedi da je iz trokuta BDO, OBE i BEN redom, $|BD| > |OB| > |BE| > |NB|$, odnosno $K(a, b) > A(a, b) > G(a, b) > H(a, b)$.

Dakle, za sve pozitivne realne brojeve a i b vrijedi $H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b) \leq K(a, b)$, s jednakošću ako i samo ako je $a = b$.