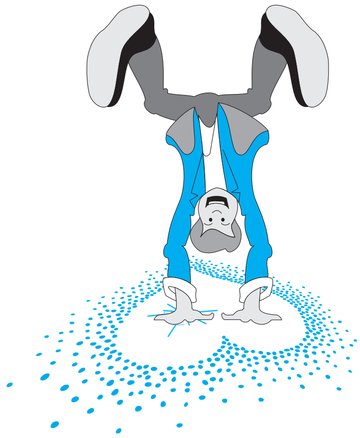


Važnost dokaza obrata poučka

Anđelko Marić, Sinj

U ovom se članku želi pokazati kako treba biti oprezan pri zaključivanju o istinitosti obrata neke tvrdnje iz (dokazane) istinitosti te tvrdnje. Središnja misao sažeta je u raščlambi (ne)istinitosti jednog zaključka. Sve će to biti pokazano na temelju zajedničkih osobitosti pravokutnoga i jednoga, njemu pridruženoga, nepravokutnog trokuta.

Prije toga, navest ćemo dva jednostavna primjera u kojima ne vrijedi obrat (istinite) tvrdnje.

1) *Ako su a i b dva realna broja i ako je $a = b$, tada je $a^2 = b^2$.*

Očito je ova tvrdnja istinita. Obrat te tvrdnje glasi:

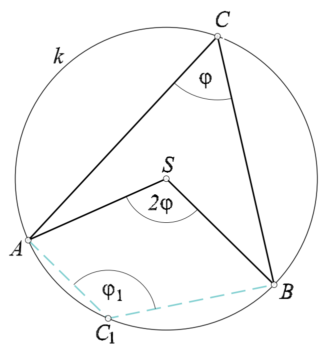
Ako za realne brojeve a i b vrijedi $a^2 = b^2$, tada je $a = b$.

To nije istinito, jer iz $a^2 = b^2$ slijedi $|a| = |b|$, te je $a = b$ ili $a = -b$.

2) U ravnini su zadane točke S, A i B tako da je $|SA| = |SB| = r$ i $\sphericalangle BSA = 2\varphi$, $0 < \varphi < 90^\circ$.

Tvrdnja. Ako je C točka ravnine takva da je $\sphericalangle BCA = \varphi$, tada točka C pripada kružnici $k(S, r)$.

Dokaz te tvrdnje slijedi neposredno iz poučka o obodnom i središnjem kutu (vidi sliku).



Obrat tvrdnje. Ako (uz zadane uvjete) točka C pripada kružnici $k(S, r)$, tada je $\sphericalangle BCA = \varphi$.

Pokažimo da to nije istinito. Ako je C_1 točka na manjem luku $\overset{\frown}{AB}$ kružnice $k(S, r)$, tad je četverokut AC_1BC tetivan i vrijedi: $\sphericalangle BC_1A = \varphi_1 = 180^\circ - \varphi$.

Sada se vratimo najavljenoj temi.

Promatrajmo tri tvrdnje koje se odnose na trokut čije su duljine stranica a, b, c, a R polumjer trokutu opisane kružnice.

$a^2+b^2=c^2 \iff$ *trokut je pravokutan.* (1)

$c=2R$, $(c^2=4R^2) \iff$ *trokut je pravokutan.* (2)

$a^2+b^2=4R^2 \iff$ *trokut je pravokutan.* (3)

Prve dvije tvrdnje su istinite. Postavlja se pitanje istinitosti treće tvrdnje, odnosno ispravnosti zaključka: $(1), (2) \implies (3)$.

Za pravokutni trokut vrijedi Pitagorin poučak, koji obično pišemo u obliku: $a^2 + b^2 = c^2$. Kako se, po Talesovu poučku, središte pravokutnom trokutu opisane kružnice podudara s polovištem hipotenuze, to je $c = 2R$. Zato, za pravokutni trokut, vrijedi:

$$a^2 + b^2 = 4R^2. \tag{4}$$

Vrijedi li obrat posljednje tvrdnje? To jest, vrijedi li tvrdnja: *Ako za duljine dviju stranica i za polumjer trokutu opisane kružnice vrijedi (4), tada je trokut pravokutan*?

Navikli smo da za većinu geometrijskih poučaka vrijedi i obrat poučka. Slijedom te navike mogli bismo na postavljeno pitanje odgovoriti: DA! Međutim, odgovor je NE. Pokažimo to na jednom primjeru.

U trokutu je zadano: $c = 8\sqrt{3}$, $\alpha = 15°$, $\gamma = 60°$. Dokažite da, uz uobičajene oznake u trokutu, vrijedi:

$$a^2 + b^2 = 4R^2.$$

Rješenje. Iz zadanih kutova je očito da trokut nije pravokutan. Vrijedi

$$2R = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{8\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 16.$$

Kako je

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \sin 15° = \sin(45° - 30°)\\ &= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°\\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},\end{aligned}$$

to je $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$, a odatle $a = 4\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$. Isto je tako

$$\begin{aligned}\sin\beta &= \sin\left[180° - (\alpha + \beta)\right] = \sin(\alpha + \beta)\\ &= \sin 75° = \sin(45° + 30°)\\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Zato je $b = 2R\sin\beta = 4(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$. Dalje je

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= \left[4\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)\right]^2\\ &\quad + \left[4\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)\right]^2\\ &= 32(4 - 2\sqrt{3} + 3 + 2\sqrt{3})\\ &= 32 \cdot 8 = 16^2,\end{aligned}$$

to jest $a^2 + b^2 = 4R^2$.

Vidimo da postoji trokut, koji nije pravokutan, a za koji vrijedi (4). Prema tome, napišemo li "Pitagorin poučak" u obliku (4), tada ne vrijedi obrat poučka.

Promotrimo još jednom trokut iz navedenog primjera. Mjere kutova toga trokuta su $\alpha = 15°$, $\beta = 105°$, $\gamma = 60°$. Uočimo da je $\beta - \alpha = 90°$. Podsjetimo se, ako je zbroj mjera dvaju kutova trokuta jednak 90°, trokut je pravokutan. Trokut kojemu je *razlika* mjera dvaju kutova jednaka 90° zove se **pseudopravokutni** trokut. Pokazat ćemo da za pseudopravokutni trokut vrijede neki poučci, potpuno u istom izričaju, kao i za pravokutni trokut. (Naravno, pritom se ne misli na opće poučke koji vrijede za bilo koji trokut.)

Dokažimo da vrijedi (nazovimo ga) **poopćeni Pitagorin poučak**:

Ako za kutove trokuta vrijedi jedna od jednakosti: $\alpha + \beta = 90°$ ili $|\alpha - \beta| = 90°$, tada za duljine nasuprotnih stranica a i b te za polumjer trokutu opisane kružnice R vrijedi $a^2 + b^2 = 4R^2$.

To znači da "Pitagorin poučak" napisan u obliku (4) vrijedi za pravokutni, ali i za pseudopravokutni trokut.

Dokaz tog poučka za pravokutni trokut izvodi se već u osnovnoj školi i ovdje ga ne-ćemo navoditi. Spomenimo da je danas poznato nekoliko stotina različitih dokaza Pitagorina poučka. (Zainteresirani čitatelj može o tome više naći u članku Mee Bombardelli: *Kako dokazati Pitagorin teorem na 30 načina?*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike mentore 5, Kraljevica, 1996.)

Dokažimo da ovako iskazan poučak vrijedi i za pseudopravokutni trokut.

Neka za kutove trokuta vrijedi $\alpha = \beta - 90°$, odnosno $\beta = 90° + \alpha$, tada je

$$\sin\beta = \sin(90° + \alpha) = \cos\alpha.$$

Kako je po poučku o sinusima $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta = 2R\cos\alpha$, to je

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2R\sin\alpha)^2 + (2R\cos\alpha)^2 \\ &= 4R^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha), \end{aligned}$$

to jest $a^2 + b^2 = 4R^2$.

Isto se dokaže i za $\beta = \alpha - 90°$.

Sada je logično postaviti ovo pitanje. Vrijedi li obrat poopćenoga Pitagorinog poučka? To jest, vrijedi li tvrdnja: *Ako za duljine stranica a i b te za polumjer R trokutu opisane kružnice vrijedi $a^2 + b^2 = 4R^2$, tada je trokut pravokutni ili pseudopravokutni?*

Poučeni dosadašnjim razmatranjima, moramo biti oprezni, jer nigdje nije dokazano da formula (4), osim za pravokutni i pseudopravokutni trokut, ne vrijedi možda i za još neke trokute. Ako za trokut vrijedi jednakost (4), tada vrijedi:

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 = 4R^2 \\ & \Longrightarrow (2R\sin\alpha)^2 + (2R\sin\beta)^2 = 4R^2 \\ & \Longrightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1 \\ & \Longrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\beta \\ & \Longrightarrow \sin^2\alpha = \cos^2\beta. \end{aligned}$$

Kako su α i β kutovi trokuta, to je $\sin\alpha > 0$, dok $\cos\beta$ može biti i pozitivan i negativan, a ne može biti jednak nuli, jer bi tada bilo $\sin\alpha = 0$, što je za kut trokuta nemoguće. Zato je $\sin\alpha = |\cos\beta|$. Moguća su dva slučaja:

1) $0 < \beta < 90°$, tada je $\cos\beta > 0 \Longrightarrow |\cos\beta| = \cos\beta$. Zato je

$$\sin\alpha = \cos\beta = \sin(90° - \beta) \Longrightarrow$$

$$\alpha = \begin{cases} 90° - \beta + k \cdot 360°, & k \in \mathbf{Z} \\ 180° - (90° - \beta) + l \cdot 360°, & l \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Mora biti (jer su α i β kutovi trokuta) $k = 0$, $l = 0$. Zato može biti $\alpha + \beta = 90°$, $\alpha - \beta = 90°$.

2) $90° < \beta < 180°$, u ovom slučaju je $\cos\beta < 0 \Longrightarrow |\cos\beta| = -\cos\beta \Longrightarrow \sin\alpha = -\cos\beta = \sin(\beta - 90°)$ odakle je

$$\alpha = \begin{cases} \beta - 90° + k \cdot 360°, \\ 180° - (\beta - 90°) = 270° - \beta. \end{cases}$$

Moguće je samo $\beta - \alpha = 90°$.

Zaključujemo, ako za trokut vrijedi relacija (4), tada vrijedi jedna od jednakosti:

$$\alpha + \beta = 90°, \qquad |\alpha - \beta| = 90°.$$

To znači, trokut za koji vrijedi (4) je pravokutni ili pseudopravokutni.

Može se pokazati da, osim relacije $a^2 + b^2 = 4R^2$ koja vrijedi i za pravokutni i za pseudopravokutni trokut, ta dva trokuta imaju još nekih zanimljivih zajedničkih svojstava. O tome više u sljedećem broju.

Rješenja iz prošlog broja:

5.

$$\begin{array}{rcrcr} 28 & \times & 3 & = & 84 \\ + & & \times & & : \\ 5 & - & 3 & = & 2 \\ \hline 33 & + & 9 & = & 42 \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{rcrcr} 27 & \times & 8 & = & 216 \\ + & & + & & : \\ 2 & \times & 9 & = & 18 \\ \hline 29 & - & 17 & = & 12 \end{array}$$

7.

$$\begin{array}{rcrcr} 7 & \times & 32 & = & 224 \\ + & & : & & - \\ 67 & \times & 2 & = & 134 \\ \hline 74 & + & 16 & = & 90 \end{array}$$