Jednostavno, ili ne?

Trapezna formula

Neven Elezović, Zagreb

Problem površine

Površina ispod grafa pozitivne funkcije f jednaka je određenom integralu te funkcije, a računa se obično Newton-Leibnitzovom formulom

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Tu je F primitivna funkcija funkcije f.

Primitivna se funkcija (neodređeni integral) ne može uvijek odrediti, ili je pak postupak integracije složen. Stoga se u mnogim situacijama neodređeni integral računa numeričkim metodama.

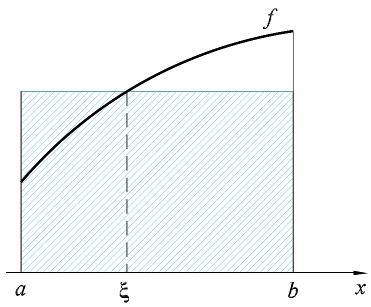
Svakako je najpoznatija formula numeričke integracije **trapezna formula** kod koje se podintegralna funkcija zamjenjuje po dijelovima linearnom funkcijom, pa tako elementi površine imaju oblik trapeza. Pročelje crkve Svetog Križa u zagrebačkom Sigetu, s naslovnice ovog broja, svakog će matematičara asocirati upravo na tu formulu.

Teorem srednje vrijednosti

Ako je f neprekinuta funkcija, definirana na intervalu $[a, b]$, tad postoji barem jedna točka $\xi \in [a, b]$ za koju je

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi).$$

Više će nam od formalnog dokaza ove tvrdnje pomoći sličica:



Površina ispod grafa funkcije f jednaka je površini pravokutnika kojemu je jedna stranica interval $[a, b]$ a duljina druge jednaka vrijednosti funkcije $f(\xi)$ u nekoj točki ξ tog intervala.

Kad bismo znali odrediti točku ξ, problem integracije funkcije f bio bi vrlo jednostavan. To, dakako, općenito nije moguće načiniti.

Integralne sume

Podijelimo interval $[a, b]$ na n dijelova, točkama $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Na svakom od njih odaberimo $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Tako ćemo dobiti približnu formulu za računanje integrala:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Podintervale možemo odabrati tako da imaju jednaku duljinu. Neka je $h_n = (b-a)/n$ i $x_i - x_{i-1} = h_n$ za svaki i. Onda dobivamo:

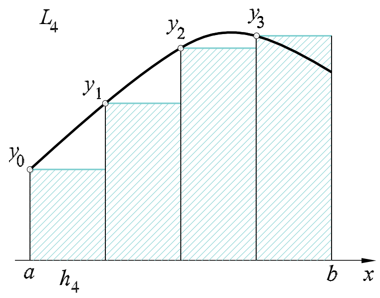
$$\int_a^b f(x)dx \approx h_n[f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_n)].$$

Ako je f integrabilna, onda osnovni teorem integralnog računa govori da će se smanjivanjem duljine h_n suma s desne strane približavati stvarnoj vrijednosti integrala. Kad bismo znali dobro odabrati brojeve ξ_i (npr. one iz teorema srednje vrijednosti za svaki od podintervala $[x_{i-1}, x_i]$), tad bi suma s desne strane dala točnu vrijednost integrala.

Nažalost, općenito ne postoji algoritam za određivanje takvih brojeva ξ_i (niti ga se može pronaći). Zato se opredjeljujemo da unaprijed odredimo te brojeve, na jedan od sljedećih načina:

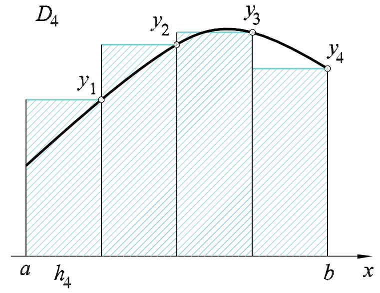
1. Stavimo li $\xi_i = x_{i-1}$, time biramo *lijevi kraj intervala* i dobivamo tzv. *lijevu sumu* koju ćemo označiti s L_n

$$\int_a^b f(x)dx \approx L_n := h_n[y_0 + \ldots + y_{n-1}].$$



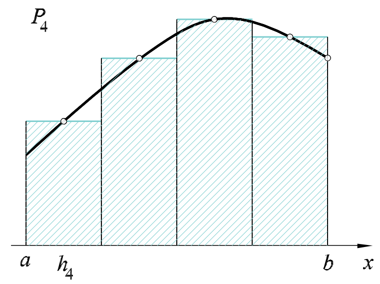
2. Odaberemo li $\xi_i = x_i$, time biramo *desni kraj intervala* i dobivamo tzv. *desnu sumu* koju ćemo označiti s D_n

$$\int_a^b f(x)dx \approx D_n := h_n[y_1 + \ldots + y_n].$$



3. Odaberemo li $\xi_i = \bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$, time biramo *polovište intervala* i dobivamo tzv. *srednju sumu* koju ćemo označiti s P_n

$$\int_a^b f(x)dx \approx P_n := h_n[\bar{y}_1 + \ldots + \bar{y}_n].$$



Koja je od ovih formula bolja? O tome ne možemo općenito ništa reći. Ipak, slike pokazuju da će za rastuće funkcije lijeva suma predstavljati donju među, a desna suma gornju među za traženi integral, dok će srednja suma bolje aproksimirati integral. Slično će vrijediti i za padajuću funkciju.

Primjer 1. Neka nam za primjer posluži funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$, promatrana na intervalu $[0, 1]$.

Površina ispod grafa te funkcije jednaka je

$$\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\,dx = 0.86700\cdots$$

(sve su znamenke točne). Račun nije jednostavan. Što će dati gore navedene formule? Računat ćemo za $n = 5$ i $n = 10$:

x_i	$f(x_i)$	$\overline{x}_i$	$f(\overline{x}_i)$
0	1	0.1	0.99990
0.2	0.99840	0.3	0.99197
0.4	0.97504	0.5	0.50807
0.6	0.88527	0.7	0.93753
0.8	0.70942	0.9	0.56415
1	0.5		

Tako dobivamo

$$L_5 = 0.91363,$$
$$D_5 = 0.81363,$$
$$P_5 = 0.86865.$$

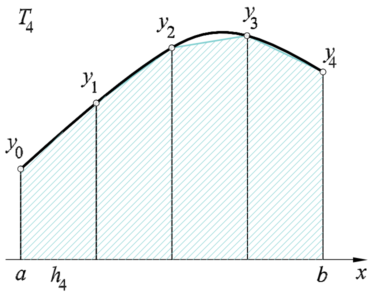
Funkcija je padajuća, pa je L_5 gornja, a D_5 donja ograda za integral. Možemo zato pokušati za bolju vrijednost integrala uzeti njihovu aritmetičku sredinu! Stavimo

$$T_5 = \frac{L_5 + D_5}{2} = 0.86363\,.$$

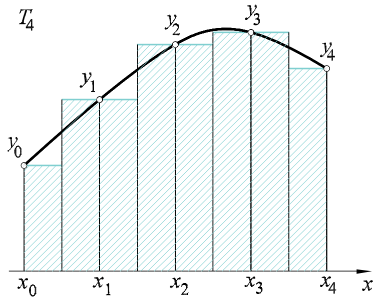
Općenito će biti

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2}(L_n + D_n) \\ &= \frac{h_n}{2}[(y_0 + \ldots + y_{n-1}) + (y_1 + \ldots + y_n)] \\ &= h_n\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right]. \end{aligned}$$

Dobili smo poznatu **trapeznu formulu**.



I sljedeća sličica predstavlja grafičku interpretaciju trapezne formule:



Popravljanje trapezne formule

Prilikom primjene trapezne formule najteže je odgovoriti na pitanje: koliko se dobiveni rezultat razlikuje od točne vrijednosti? Dakako da postoje ocjene za pogrešku integracije, ali one su složene i ne bismo htjeli procjenu raditi na taj način. U praksi je mnogo korisniji sljedeći postupak: nakon što smo izračunali trapeznom formulom vrijednost integrala, povećamo broj točaka i izračunamo ponovo isti integral. Ako se dobivene vrijednosti ne razlikuju mnogo, tad smo blizu točnog rezultata.

Ima li smisla povećati broj točaka s 5 na, recimo, 6? Ne! U tom bismo slučaju morali ponovo računati vrijednost funkcije u svih 6 točaka. Umjesto toga, mi ćemo broj točaka *udvostručiti*. Tako će se u novoj podjeli naći i sve stare točke! Moći ćemo iskoristiti već prije izračunate rezultate, a novi će rezultat imati veću točnost.

Povećamo li broj čvorova za dvostruko, vrijedit će formula:

$$\boxed{T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{1}{2}P_n.}$$

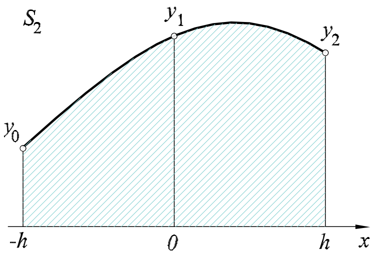
Tako u gornjem primjeru dobivamo

$$T_{10} = \frac{1}{2}\cdot T_5 + \frac{1}{2}\cdot P_5 = 0.86614\,.$$

Pogreška je manja od 0.1%.

Simpsonova formula

Kad računamo trapeznom formulom, graf funkcije zamjenjujemo odsječcima pravca. Pokušamo li zamijeniti graf funkcije ne dijelovima pravca već parabole, očekujemo da ćemo dobiti precizniju formulu. Neka su zadane vrijednosti funkcije y_0, y_2 na krajevima intervala duljine $2h$, te y_1 u sredini tog intervala. Kolika je površina ispod luka parabole koja prolazi tim točkama?



Možemo pretpostaviti da se radi o intervalu $[-h, h]$, jer izbor intervala ne mijenja iznos površine.

Polinom drugog stupnja $f(x) = ax^2 + bx + c$ čiji graf prolazi točkama $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, (h, y_2) naziva se **interpolacijski polinom**. Njegovu jednadžbu možemo odrediti i elementarnim računom:

$$\begin{aligned} ah^2 - bh + c &= y_0, \\ c &= y_1, \\ ah^2 + bh + c &= y_2. \end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2), \\ b &= \frac{1}{2h}(y_2 - y_0), \\ c &= y_1 \end{aligned}$$

pa je tražena jednadžba

$$y = \frac{1}{2h_2}(y_0 - 2y_1 + y_2)x^2 + \frac{1}{2h}(y_2 - y_0)x + y_1.$$

Površina ispod grafa ove funkcije je:

$$\int_{-h}^{h} y\,dx = \frac{h}{3}\Big[y_0 + 4y_1 + y_2\Big].$$

Podijelimo sad interval $[a, b]$ na n dijelova (n je paran broj). Stavimo $h_n = (b-a)/n$. Na svaka susjedna dva dijela zamijenimo integral ovom formulom. Dobit ćemo **Simpsonovu formulu**

$$S_n = \frac{h_n}{3}\Big[y_0 + 4(y_1 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + \ldots + y_{n-2}) + y_n\Big].$$

Još kompliciranije formule

Ako umjesto parabole koristimo polinome višeg stupnja, dobit ćemo još točnije i, dakako, još kompliciranije formule. Tako na primjer, podijelimo li interval na tri dijela, onda se kroz četiri točke može provući točno jedan polinom trećeg stupnja. Njegovu jednadžbu nećemo određivati, niti integrirati. Završna formula glasi:

$$I = \frac{h_3}{2}\Big[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\Big].$$

Za nas će interesantan slučaj biti uzmemo li polinom četvrtog stupnja! Interval je potrebno podijeliti na četiri jednaka dijela. Neka je $h_4 = (b-a)/4$, a $y_0, \ldots, y_4$ vrijednosti funkcije u djelišnim točkama. Tad dobivamo sljedeću **Newtonovu formulu**:

$$I = \frac{2h_4}{45}\Big[7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4\Big].$$

Ona će svakako dati bolje rezultate. Ali, ima li smisla pamtiti formule s tako groznim koeficijentima?

Nema! Pokazat ćemo da je dovoljno poznavati samo trapeznu formulu, jer se ove složenije formule mogu dobiti iz nje jednostavnim postupkom!

Od trapezne formule prema složenijim

Podijelimo interval $[a, b]$ na četiri dijela, stavimo $h = h_4 = (b-a)/4$. Prve dvije formule za dva i četiri čvora glase ovako:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{h_2}{2}[y_0 + 2y_2 + y_4] \\ &= h[y_0 + 2y_2 + y_4], \\ T_4 &= \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4]. \end{aligned}$$

Izračunajmo sad izraz:

$$\begin{aligned} \frac{4T_4 - T_2}{3} &= \frac{2h}{3}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4] \\ &\quad - \frac{h}{3}[y_0 + 2y_2 + y_4] \\ &= \frac{h}{3}\Big[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\Big]. \end{aligned}$$

Dobili smo Simpsonovu formulu!

Iz trapezne formule, uvijek možemo izvesti Sipmsonovu, prema općenitoj formuli:

$$\boxed{S_{2n} = \frac{4 \cdot T_{2n} - T_n}{3}.}$$

. . . i prema još složenijim

Izračunajmo sad

$$\begin{aligned} \frac{16S_4 - S_2}{15} &= \frac{16h}{45}\Big[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\Big] \\ &\quad - \frac{2h}{45}\Big[y_0 + 4y_2 + y_4\Big] \\ &= \frac{2h}{45}\Big[7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4\Big]. \end{aligned}$$

Dobili smo Newtonovu formulu!

Općenito će biti

$$\boxed{N_{2n} = \frac{16 \cdot S_{2n} - S_n}{15}.}$$

Kako računati?

Sljedeći je postupak vrlo praktičan:

Podijelimo interval na 8 dijelova. Zatim računamo redom (i zapisujemo rezultate)

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{b-a}{2}\Big[y_0 + y_4 + y_8\Big]. \\ T_4 &= \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2}P_2 \\ &= \frac{1}{2}T_2 + \frac{b-a}{4}\Big[y_2 + y_6\Big]. \\ T_8 &= \frac{1}{2}T_4 + \frac{1}{2}P_4 \\ &= \frac{1}{2}T_4 + \frac{b-a}{8}\Big[y_1 + y_3 + y_5 + y_7\Big]. \\ S_4 &= \frac{1}{3}[4T_4 - T_2], \quad S_8 = \frac{1}{3}[4T_8 - T_4]. \\ N_8 &= \frac{1}{15}[16S_8 - S_4]. \end{aligned}$$

Rezultate zapisujemo u obliku tablice:

$$\begin{array}{ccc} T_2 & T_4 & T_8 \\ & S_4 & S_8 \\ & & N_8 \end{array}$$

Za približnu vrijednost integrala uzima se broj N_8.

Ovaj se način računanja naziva **Rombergov algoritam**. On daje najbolji način za numeričko integriranje funkcije.

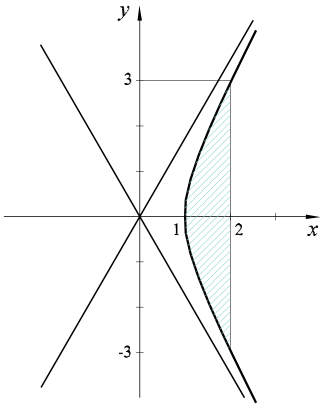
Gornja se tablica može i poopćiti. Možemo krenuti od nekog drugog broja n većeg od 2:

$$\begin{array}{cccc} T_n & T_{2n} & T_{4n} & \cdots \\ & S_{2n} & S_{4n} & \cdots \\ & & N_{4n} & \cdots \end{array}$$

Pri "ručnom" računu posebno je pogodno uzeti $n = 5$. Korisno je u računanju koristiti džepno računalo koje može pamtiti oblik funkcije, tako da se njezina vrijednost može dobiti pritiskom na jednu tipku.

Dakako da svi ovi algoritmi postaju neusporedivo efikasniji ako se rabi računalo. Formule su vrlo jednostavne naravi i lako je napisati program za njihovo korištenje.

Primjer 2. Izračunajmo površinu koju od hiperbole $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$ odsijeca okomita tetiva koja prolazi njezinim žarištem.



Os apscisa prepolavlja tu površinu. Zato je

$$\frac{1}{2}P = \int_1^2 \sqrt{3(x^2-1)}\,dx.$$

Točna vrijednost ovog integrala dade se odrediti, ali metode integriranja izlaze izvan okvira koji se uči u srednjoj školi:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \sqrt{3(x^2-1)}\,dx = \left[\begin{matrix} x = \operatorname{ch} u \\ dx = \operatorname{sh} u\,du \end{matrix}\right] \\ &= \sqrt{3}\int_0^{\operatorname{ar\,ch} 2} \operatorname{sh}^2 u\,du \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t - t\right]\Bigg|_0^{\operatorname{ar\,ch} 2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[2\sqrt{3} - \operatorname{ar\,ch} 2\right] = 1.85948\cdots \end{aligned}$$

(neki koraci u računu su preskočeni).

Pokušajmo računati prema gornjem algoritmu, za $n = 2, 4, 8$. Zapisat ćemo samo brojeve u završnoj tablici:

1.71825	1.80575	1.83949
	1.83492	1.85074
		1.85179

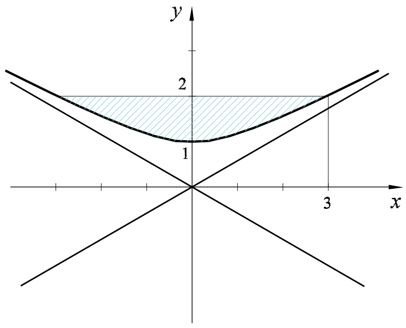
Pogreška u računu je samo 0.4%.

* * *

Trapezna formula može učiniti i bolje!

Zamislimo istu hiperbolu zarotiranu za 90°. Onda su joj žarišta na y-osi. Zapravo, tu ćemo parabolu dobiti i zrcaljenjem oko pravca $y = x$. Zato se njezina jednadžba dobiva tako da se zamijene imena varijablama:

$$y^2 - \frac{x^2}{3} = 1 \implies y = \sqrt{\frac{x^2}{3} + 1}.$$



Izračunajmo površinu ispod grafa ove funkcije, nad intervalom [0,3]. Dobiveni broj moramo oduzeti od 6, da dobijemo vrijednost koju smo računali u gornjem primjeru:

4.23431	4.16397	4.14638
	4.14052	4.14051
		4.14051

Dobivamo: $6 - 4.14051 = 1.85948$, rezultat čija je svaka znamenka točna!

Integriranje bez integriranja

Simpsonova formula daje točne rezultate ako je podintegralna funkcija polinom stupnja ≤ 3! Newtonova je točna za polinome stupnja ≤ 5. To možemo iskoristiti za računanje nekih površina elementarnim metodama.

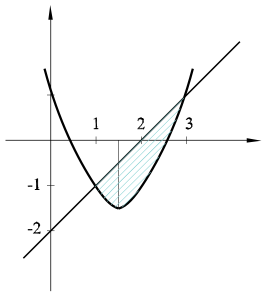
Primjer 3. Kolika je površina koju od parabole $y = x^2 - 3x + 1$ odsijeca pravac $y = x - 2$?

Parabola i pravac se sijeku u točkama $(1, -1)$ i $(3, 1)$. Trebamo izračunati površinu ispod funkcije

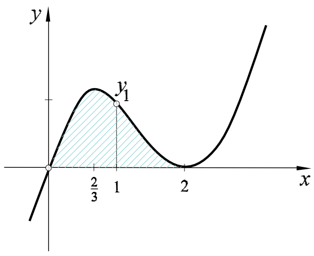
$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2) - (x^2 - 3x + 1) \\ &= -x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$

nad intervalom $[1, 3]$. Tu je $y_0 = f(1) = 0$, $y_1 = f(2) = 1$, $y_2 = f(3) = 0$ pa je površina jednaka

$$P = \frac{h_2}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right] = \frac{4}{3}.$$



Primjer 4. Koliku površinu zatvara graf funkcije $y = x(x-2)^2$ s osi apscisa, između njegovih dviju nultočaka?



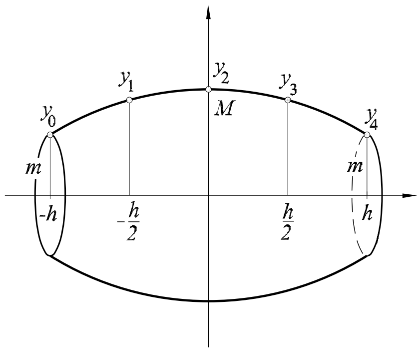
Nultočke su 0 i 2, a vrijednosti funkcije $y_0 = f(0) = 0$, $y_1 = f(1) = 1$, $y_2 = f(2) = 0$. Ponovo dobivamo

$$P = \frac{h_2}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right] = \frac{4}{3}.$$

Primjer 5 Volumen bačve. Bačva je rotacijsko tijelo čiji se volumen dobiva formulom

$$V = \pi \int_{-h}^{h} y^2(x)dx.$$

Ovdje je $y(x)$ nepoznata funkcija koja opisuje oblik dužice bačve. Za tu funkciju znamo samo vrijednosti: $y_0 = y(-h) = m$, $y_2 = y(0) = M$, $y_4 = y(h) = m$.



Pretpostavimo da dužica ima oblik kružnog luka! Tad je $y^2(x)$ polinom drugog stupnja. Sjetite se jednadžbe kruga koji prolazi kroz tri zadane točke. Tu jednadžbu nećemo trebati izvoditi! Simpsonova formula dat će točnu vrijednost integrala i bez određivanja točnog izraza za funkciju $y^2(x)$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \cdot \frac{h}{3}\left[m^2 + 4M^2 + m^2\right] \\ &= \frac{2h\pi}{3}\left[2M^2 + m^2\right]. \end{aligned}$$

Pretpostavimo sad da dužica ima oblik luka parabole. Jednadžba tog luka je

$$y(x) = M - \frac{M-m}{h^2}x^2.$$

Tad je y^2 polinom četvrtog stupnja i Newtonova formula dat će točan rezultat integracije. Trebamo izračunati samo

$$y_1 = y_3 = y\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{3}{4}M + \frac{1}{4}m.$$

Prema Newtonovoj formuli je (uvažavajući $y_0 = y_4$ i $y_1 = y_3$):

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{2h\pi}{90}\left[14y_0^2 + 64y_1^2 + 12y_2^2\right] \\ &= \frac{2h\pi}{15}\left[8M^2 + 4Mm + 3m^2\right]. \end{aligned}$$

U koju bačvu stane više? Lako se dobiva

$$V_1 - V_2 = \frac{4\pi h}{15}(M-m)^2.$$

Dakle, u kružnu bačvu uvijek stane više vina. Za određivanje kvalitete samog vina niti trapezna formula neće pomoći, tu treba ipak koristiti tradicionalne metode.