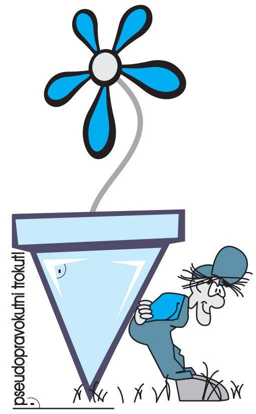


Neke osobitosti pseudopravokutnog trokuta

Anđelko Marić, Sinj

Ovaj članak je nastavak članka *Važnost dokaza obrata poučka*, objavljenog u prošlom broju MŠ-a i s tim člankom čini cjelinu. Zato se preporuča čitatelju, ako nije pročitao taj članak, da to učini prije čitanja ovog teksta.

U tom je članku pokazano da za pravokutni i za pseudopravokutni trokut vrijedi:

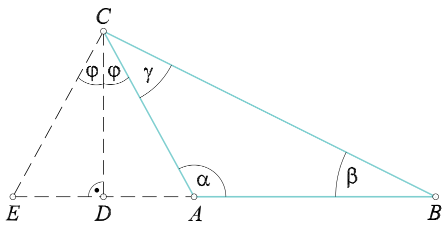
$$a^2 + b^2 = 4R^2. \tag{1}$$

Isto je tako pokazano da, ako za trokut vrijedi (1), tada je trokut ili pravokutan ili pseudopravokutan.

Pokažimo da još jedan poučak koji vrijedi za pravokutni trokut, vrijedi u potpuno istom izričaju i za pseudopravokutni trokut.

Poučak. *Ako je D nožište visine spuštene iz vrha C (pseudo)pravokutnog trokuta ABC u kojem je $|\alpha \pm \beta| = 90°$, tada vrijedi $|CD| = \sqrt{|AD| \cdot |BD|}$.*

Dokaz. Ako je trokut pravokutan, s pravim kutom pri vrhu C, tada je to poznati **Euklidov poučak** koji se već dugo ustalio u srednjoškolskim programima, gdje se redovito dokazuje. Zato ga ovdje nećemo dokazivati.



Sl. 1.

Dokažimo da taj poučak vrijedi i za pseudopravokutni trokut. Neka je, uz ostale oznake kao na sl. 1., $\alpha - \beta = 90°$. Označimo li $\varphi = \sphericalangle ACD$, tada je $\alpha = 90° + \varphi$ (poučak o vanjskom kutu trokuta), a odatle $\varphi = \alpha - 90° = \beta$. Neka je E točka na pravcu AB uzeta tako da je D polovište dužine $\overline{EA}$. Tada je trokut EAC jednakokračan i $\sphericalangle DCE = \varphi = \beta$. Zato je

$$\begin{aligned}\sphericalangle BCE &= \gamma + \varphi + \varphi = \gamma + \beta + \alpha - 90° \\ &= 180° - 90° = 90°.\end{aligned}$$

Vidimo da je trokut EBC pravokutan, a dužina $\overline{CD}$ visina tog trokuta iz vrha pravog kuta. Zato možemo na taj trokut primijeniti Euklidov poučak i dobijemo:

$$|CD| = \sqrt{|ED| \cdot |BD|} = \sqrt{|AD| \cdot |BD|},$$

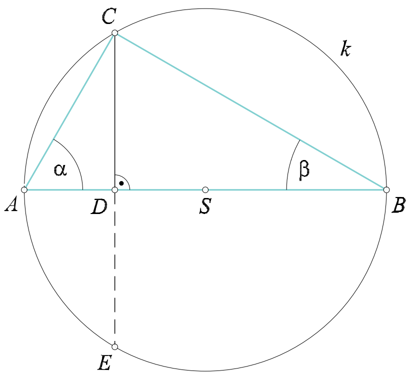
čime je tvrdnja poučka dokazana.

Dokažimo da vrijedi:

Obrat poučka. *Ako je D nožište visine trokuta ABC spuštene iz vrha C i ako je $|CD| = \sqrt{|AD| \cdot |BD|}$, tada je trokut pravokutan ili pseudopravokutan.*

Dokaz. Razlikujemo opet dva slučaja.

1) Kutovi trokuta α i β su šiljasti:



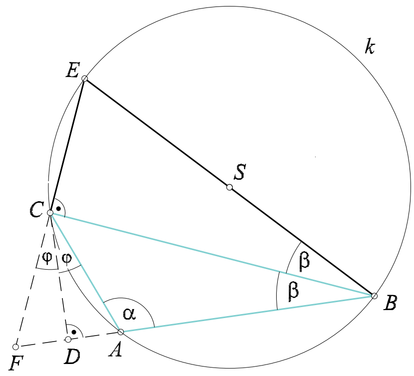
Sl. 2.

Vidimo da točka D pripada dužini $\overline{AB}$, (sl. 2.). Neka je E točka u kojoj pravac CD siječe kružnicu k opisanu promatranom trokutu. Potencija točke D s obzirom na kružnicu k iznosi

$$|CD| \cdot |ED| = |AD| \cdot |BD|.$$

Kako je po pretpostavci obrata poučka $|CD|^2 = |AD| \cdot |BD|$, to je $|ED| = |CD|$. Budući je $\overline{BD} \perp \overline{CE}$ i $|CD| = |ED|$, to je $\overline{BA}$ simetrala tetive $\overline{CE}$. Zato središte kružnice k pripada stranici $\overline{AB}$, zbog čega je, po Talesovu poučku, trokut ABC pravokutan s pravim kutom pri vrhu C.

2) Jedan od kutova α ili β je tup, na primjer α, kao na sl. 3.



Sl. 3.

Neka je k kružnica opisana trokutu ABC, a E druga točka promjera $\overline{BE}$, tada je $\sphericalangle ECB = 90°$. Ako je F sjecište pravaca EC i BA, tada je trokut FBC pravokutan i vrijedi

$$|CD|^2 = |FD| \cdot |BD|,$$

a odatle je zbog pretpostavke $|FD| = |AD|$. Vidimo da je dužina $\overline{CD}$ ujedno visina i težišnica trokuta ACF. Zato je

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCF = \varphi,$$
$$\sphericalangle CFA = \sphericalangle FAC = 180° - \alpha.$$

Kako je $\sphericalangle BCF = 90°$, to je $\sphericalangle FBC + \sphericalangle CFB = 90°$, odnosno $\beta + 180° - \alpha = 90°$, to jest $\alpha - \beta = 90°$, što znači da je trokut pseudopravokutan.

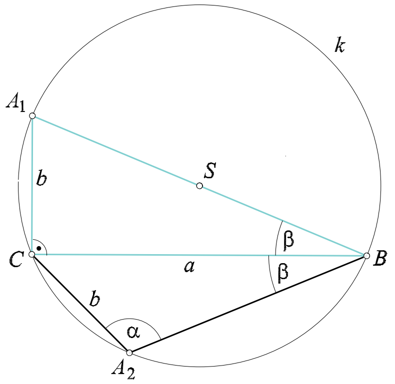
Da smo uzeli da je kut β tupi, dobili bismo $\beta - \alpha = 90°$, u svakom je slučaju $|\alpha - \beta| = 90°$. Time je obrat poučka u potpunosti dokazan.

Dokažimo još jednu zanimljivu tvrdnju za pravokutni i pseudopravokutni trokut.

Tvrdnja. *Za svaki pravokutni trokut A_1BC koji nije jednakokračan i kojem su katete $|BC| = a$, $|CA_1| = b$ i jedan od kutova nasuprot zadanim stranicama, na primjer $\sphericalangle A_1BC = \beta = 45°$, postoji pseudopravokutni trokut A_2BC kojem je $|BC| = a$, $|CA_2| = b$, $\sphericalangle A_2BC = \beta$.*

Oba tako definirana trokuta imaju polumjere opisanih kružnica jednakih duljina, pa zato za oba ta trokuta vrijedi formula (1).

Tako određen par trokuta nazivamo **pridruženi Pitagorini trokuti**. Dokaz provedimo uz oznake kao na sl. 4.



Sl. 4.

Dokaz. Neka je $\overline{A_1B}$ bilo koji promjer kružnice $k(S;R)$ i C točka te kružnice takva da je $\sphericalangle A_1BC = \beta < 45^\circ$. Trokut A_1BC je po Talesovu poučku pravokutan i vrijedi

$$|BC|^2 + |CA_1|^2 = |A_1B|^2$$

ili

$$a^2 + b^2 = 4R^2. \tag{1}$$

Neka je A_2 točka kružnice k tako uzeta da je $\overline{BC}$ simetrala $\sphericalangle A_1BA_2$. Zato je $\sphericalangle A_1BC = \sphericalangle A_2BC = \beta$ i zbog toga $|CA_2| = |CA_1| = b$. Iz svega zaključujemo da za ta dva trokuta vrijedi (1) i oni su pridruženi Pitagorini trokuti. Time je postavljena tvrdnja dokazana.

Napomenimo još jednu činjenicu koja neposredno slijedi iz definicije pridruženih Pitagorinih trokuta.

Ako su α, β i 90°, $\alpha \neq \beta$, kutovi pravokutnog trokuta, tada su kutovi pridruženog pseudopravokutnog trokuta φ, $|\alpha - \beta|$ i $90^\circ + \varphi$, gdje je $\varphi = \min\{\alpha, \beta\}$.

Na kraju, navedimo još jedan poučak koji vrijedi za pseudopravokutni trokut.

Poučak. *Ako su poznate duljine dviju stranica trokuta, tada se u općem slučaju ne može odrediti duljina treće stranice. Međutim, to se može učiniti i za pravokutni trokut i za pseudopravokutni trokut.*

Ako za kutove trokuta vrijedi $\alpha + \beta = 90^\circ$ (pravokutni trokut), tada za duljine stranica trokuta vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$.

Ako za kutove trokuta vrijedi $|\alpha - \beta| = 90^\circ$ (pseudopravokutni trokut), tada za duljine stranica trokuta vrijedi:

$$c^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2},$$

ili

$$c^2 = a^2 + b^2 - \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Dokaz ovog poučka, koji ne sprovodimo zbog ograničenosti prostora, čitatelj može naći u knjizi: A. Marić, *Planimetrija*, Element, Zagreb, 1996.; zad. 2.43.

Zadaci za vježbu

1. Dva Pitagorina trokuta imaju jednake duljine dviju stranica a, b, $a > b$ i jednake kutove β nasuprot manjim stranicama. Dokažite da za treći par stranica vrijedi:

$$\frac{c_2}{c_1} = \cos 2\beta.$$

(*Naputak:* promatraj trokut A_1BA_2 na sl. 4.)

2. Zadana su dva trokuta duljina stranica: $a_1 = 5$, $b_1 = 12$, $c_1 = 13$; $a_2 = 5$, $b_2 = 12$, $c_2 = \frac{119}{13}$. Dokažite da su to pridruženi Pitagorini trokuti.
(Zadatak se može riješiti na više načina. Jedan od njih je: dovoljno je dokazati da je $2R_2 = c_1$.)

3. Duljine kateta pravokutnog trokuta su 8 i 15. Izračunajte duljine stranica njemu pridruženog pseudopravokutna trokuta. Izračunajte polumjer kružnice opisane pseudopravokutnom trokutu i pokažite da vrijedi (4).

(Nastavak na str. 189.)