Nastava matematike u Italiji

Massimo Borelli, Virna Dalino, Rovinj — Rovigno

> *. . . und ein Geschichtsforscher konnte an der Idealität ihrer Züge sehr leicht den Einfluß der bildenden Künste auf die Leiblichkeit des italienischen Volkes nachweisen.*
>
> *Heinrich Heine,*
> *Florentinische Nächte*

UNESCO procjenjuje da se u Italiji nalazi oko 60 posto svjetskog umjetničkog blaga. Unatoč tome ne možemo u potpunosti prihvatiti Heineovu tezu da je to utjecalo na vanjštinu i fizički izgled Talijana. Upravo ovakva promišljanja neka nam budu polazište za razumijevanje uvriježenih shvaćanja u Italiji, po kojima je intelektualac prvenstveno umjetnik, književnik, a ne znanstvenik.

Ovaj argument pomoći će čitatelju da shvati kakva je uloga dodijeljena matematici u talijanskom školstvu, iako srećom, takvo mišljenje ne prevladava. U ovom članku nastojat ćemo prikazati profile određenih aspekata izvođenja nastave matematike u talijanskim školama, osvrnut ćemo se na reforme u nastavi matematike koje se provode posljednjih godina u kompleksnom talijanskom svijetu školstva od obavezne, osnovne škole, do srednjoškolskog obrazovanja, od sveučilišnog, do formiranja novih nastavničkih kadrova.

Reforme koje se trenutno provode, teže podići razinu obaveznog školovanja, žele revidirati sadržaje i programe nastave matematike i usaglasiti ih sa standardima Europske zajednice. Naravno, dotakli smo vrlo opširnu temu koja otvara niz novih. Posebnostima talijanskog didaktičkog sustava pozabavit ćemo se u sljedećih nekoliko odlomaka, naglašavajući ono što je drugačije od didaktike i metodike nastave matematike u Hrvatskoj.

Prosječan talijanski učenik mora u osnovnoj školi provesti pet godina, zatim tri godine u nižoj srednjoj školi (*scuola media inferiore*), a ako želi nastaviti svoje obrazovanje, provest će još pet godina u višoj srednjoj školi (*scuola media superiore*). Nakana reformatora školstva jest da obavezno školovanje potraje deset godina, a srednjoškolsko tri, nakon čega učenik stječe pravo nastaviti studij na sveučilištu. Naravno, ovo se odnosi na učenike koji su motivirani za studije, uglavnom gimnazijalce (izostavljene su primjerice srednje tehničke i industrijsko obrtničke škole). Valja napomenuti da su u Italiji jezične i umjetničke gimnazije u manjem broju pred klasičnim i prirodoslovno-matematičkim gimnazijama.

Nedovoljna važnost matematike u kulturološkom obrazovanju Talijana nasljeđe je reforme filozofa Giovannija Gentilea iz dvadesetih godina XX. stoljeća. On očito nije prepoznavao i pridavao suviše značenja disciplini Gaußa i Euklida u formalnom obrazovanju učenika. Činjenica je da se i nakon osamdeset godina moramo "boriti" sa zastarjelim programima koji kao da "kažnjavaju" mlade matematičare. Svih su ovih godina učenici koji su maturirali u klasičnoj gimnaziji[1] jedva znali *riješiti* pravokutni trokut primjenom trigonometrije, ili nacrtati parabolu u koordinatnom sustavu. Oni nisu znali što je, na primjer, neprekidnost ili pak derivacija funkcije, kad su dva vektora linearno nezavisna, nisu znali za konvergentni slijed, ni kako riješiti goniometrijsku nejednadžbu.

U prirodoslovno-matematičkim gimnazijama situacija je bila nešto bolja: u prve dvije godine školovanja učenicima su bile predstavljene osnovne teme iz algebre, analitičke geometrije pravca i parabole, i Euklidove geometrije. Naredne tri godine davalo se prostora i logaritmima (3. razred), goniometriji i trigonometriji (4. razred), te proučavanju funkcija, diferencijalima i integralima (5. razred). Gubeći sredstva i vrijeme, trošila se energija u završna četiri razreda na tzv. "probleme I. i II. stupnja s raspravom" (na žalost, u mnogim je školama i danas tako). Radi se, naime o tome da se postavi i riješi jedan geometrijski problem uz neki realni parametar i odredi broj i priroda rješenja kod varijacije parametra. Navodimo primjer preuzet iz jednog maturalnog ispita iz šezdesetih godina. Umijeće rješavanja temeljilo se na usvojenom znanju učenika, ne uzimajući u obzir njegovu kreativnost. Slijedi zadatak:

Zadan je trokut ABC čije su stranice duge $|AB| = 13$, $|BC| = 14$ *i* $|CA| = 15$ *i promotrimo trokutu upisanu kružnicu. Odredite pravac r paralelan stranici* $\overline{BC}$ *gdje tetive* $\overline{MN}$ *i* $\overline{PQ}$ *na r rastavljaju dotični trokut i kružnicu, tako da dobijete* $|PQ| + \frac{6}{7}|MN| = s$, *gdje je s pozitivan broj unaprijed zadan. Raspravite rješenja ako je s promjenjiva veličina.*

Srećom, osamdesetih godina su osnovne i niže srednje škole bile zainteresirane za reforme koje su se odnosile na nastavu matematike s gledišta sadržaja i didaktičkih programa — naime, programi u Italiji nisu strogo određeni i propisani; primjerice za niže srednjoškolsko obrazovanje, Ministarstvo određuje da kroz tri godine nastavnik mora obraditi sedam "tema" (cjelina), prema didaktičkom vodiču, kako mu najviše odgovara:

1) geometrija kao prva predožba fizičkog svijeta (likovi u ravnini i prostoru, duljine i površine, opsezi, kutovi, Pitagorin poučak, konstrukcije ravnalom i šestarom);
2) skupovi brojeva (prirodni brojevi, decimalni brojevi, izravno i obrnuto računanje, potencije i drugi korijen, višekratnici, dijeljenje i rastavljanje na faktore, točan i približan račun sa pomagalima za računanje);
3) matematika izvjesnozti i vjerojatnosti (tvrdnje tipa točno / netočno i vjerojatno, logičke veze, skupljanje podataka i njihovo grafičko prikazivanje, slučajni događaji, vjerojatnost);
4) problemi i jednadžbe (podaci i varijable, upotreba i pretvaranja formule, jednadžbe i nejednadžbe I. stupnja);
5) metoda koordinata (točke u ravnini, na pravcu, mnogokuti, izravna i obrnuta

[1] Škola koja je godinama obrazovala učiteljski kadar i buduće talijanske intelektualce

proporcionalnost);

6) geometrijska preslikavanja (sukladnost, kompozicija sukladnosti, sličnosti, promatranje ostalih geometrijskih preslikavanja);

7) relacije i strukturalna analogija (pojam funkcije i relacije, zakon kompozicije).

Zahvaljujući uvodu u "Nacionalni informatički plan", potreba za ponavljanjem i obnavljanjem gradiva u višoj srednjoj školi naišla je na polovičan odaziv. Naime, početkom '80-ih u svim višim srednjim školama mogle su se osnivati eksperimentalne sekcije — nastavi matematike dodavala se izborna, laboratorijska nastava informatike: učenici uče Pascal koji upotpunjuju algoritmima matematičkog i grafičkog tipa. Devedesetih godina, u višim srednjim školama, oslanjajući se na iskustvo i rezultate nižeg srednjoškolskog sustava, javio se ambiciozni poticaj "pomlađivanja" programa. Ambicija ovog programa bila je zainteresirati sve srednje škole, ali je do danas ostao eksperimentalan, te predodređen zamiranju prije nego li je zaživio, podređen neizbježnom porastu školskih obaveza i neophodnoj redefiniciji programa. Samo obnavljanje i redefiniranje ne bi se trebalo odvajati od prvotno predviđenih tema:

1) geometrija (Euklidova geometrija, analitička geometrija, geometrijske transformacije (Kleinova geometrija), primjene trigonometrije u planimetriji, neeuklidske geometrije);

2) skupovi brojeva i njihove strukture (skup **N**, **Z**, **Q**, **R**, **C**, brojnost skupova, algebarske strukture, vektorski prostori, matrice);

3) funkcije i jednadžbe (jednadžbe i nejednadžbe I. i II. stupnja, eksponencijalne i logaritamske funkcije, goniometrijske funkcije);

4) vjerojatnost i statistika (deskriptivna statistika, vjerojatnost, distribucije, Gaußova razdioba, zakon velikih brojeva, zaključivanje i procjenjivanje parametara);

5) logika (logika predikata);

6) informatika (numerički algoritmi u Pascalu, grafika, složenost i teorija izračunljivosti);

7) infinitezimalna analiza (nultočke funkcije, algebarske i transcendentne jednadžbe, limes slijeda i funkcije, graf funkcije, derivacija, integrali, numerička analiza).

Kako je već rečeno, u Italiji informatika nije zaseban školski predmet, nego je učenicima predstavljena kao vid matematike, ili bolje rečeno, informatika je pomoćna matematička disciplina. Podučavaju je upravo nastavnici matematike, pa se može razumjeti kakav je to napor (možemo reći i šok) bio za talijansku školsku mrežu u vrijeme eksperimentalne faze uvođenja informatičkog obrazovanja; trebalo je "opismeniti" desetke tisuća nastavnika matematike (diplomiranih matematičara, fizičara, diplomiranih inženjera biologije, statistike i prirodnih znanosti), koji do tada nikad nisu čuli za operativne sustave, programske jezike ili primjenu softwarea. Analogno, možemo samo slutiti kakve bi poteškoće mogle sutra izazvati reforme u kojima bi u sve programe viših srednjih škola bile uvedene logika, informatika, statistika i vjerojatnost. Naime, mnogi (ne želimo tvrditi da je to većina!) nastavnici matematike diplomirali su bez ijednog položenog ispita iz vjerojatnosti, logike ili statistike. Na talijanskim sveučilištima predavanja i ispiti iz gore navedenih područja smatraju se nebitnima i komplementarnima. Osim toga, u Italiji ne postoji formalna razlika između zvanja "profesor" i "dipl. ing. matematike", što znači da student bira želi li diplomirati iz općeg smjera (dipl. ing. matematike), didaktičkog (prof. matematike) ili aplikacijskog, ali o tom izboru na sveučilišnoj diplomi nema ni traga! Pozitivne novine dolaze nam u ovoj akademskoj godini; unutar sveučilišta počele su djelovati dvogodišnje postdiplomske škole za stručno usavršavanje diplomanata matematike u procesu nastave na srednjim školama.

Tijekom proteklih godina nije izostalo zanimanje sveučilišnih metodičara i didaktičara matematike; vrlo su aktivne strukture koje se bave didaktikom i eksperimentiranjem u osnovnim i srednjim školama. Nazivaju se "jezgrama didaktičkih istraživanja", a brinu se o osuvremenjivanju znanja nastavnika (tzv. permanentno obrazovanje). Inicijatori ideje bili su Giovanni Torelli (Sveučilište u Trstu) i Giovanni Prodi (Sveučilište u Pisi). Oni su sedamdesetih godina stvorili "forum" sveučilišnih i školskih docenata, kojima je zadatak bio usko povezivanje i djelovanje radi osmišljavanja novih oblika nastave. Upravo zahvaljujući "Jezgrama", programi za osnovne škole smatrani su uravnoteženima i zadovoljavajućima.

Još su dvije pojave o kojima bismo željeli govoriti. Prva je državni ispit — pri kraju višeg srednjoškolskog obrazovanja učenici polažu "državni" maturalni ispit (jednak u svim talijanskim školama istog smjera), a učenici prirodoslovno-matematičke gimnazije polažu i istovjetan pismeni ispit iz matematike. Osvrćemo se na taj ispit jer zna biti veoma zahtjevan, čak i nepotrebno zahtjevan. Navodimo zadatak maturalnog ispita iz 80-ih godina:

Zadana je funkcija $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$. *Nacrtajte u jednom koordinatnom sustavu grafove funkcija* $y = f(x)$ *i* $y = f'(x)$. *Izračunajte površinu dijela ravnine omeđenog spojnicom točaka koje su lokalni ekstremi tih dviju funkcija, grafom funkcije* $f(x)$ *i paralelom s osi ordinata u nultočki funkcije* f'.

Sljedeće pitanje koje navodimo, prvo je od tri pitanja postavljena prošle godine na maturi; obratite pažnju na sadržaje koji su uvijek iste prirode iako je forma pitanja razdijeljena.

Neka je $f(x)$ *realna funkcija realne varijable, koja je derivabilna u točki* $\tilde{x}$ *unutar domene.*

a) Recite da li je uvjet $f'(\tilde{x}) = 0$*:*

— potreban, ali nedovoljan,

— dovoljan, ali nepotreban,

— potreban i dovoljan,

kako biste zaključili da funkcija ima jedan lokalni ekstrem u točki $\tilde{x}$. *Opširno obrazložite dokaz.*

b) Neka je $f(x) = \dfrac{x^3}{ax+b}$, *gdje su* a, b *realni parametri. Odredite ove parametre tako da krivulja G s jednadžbom* $y = f(x)$ *ima lokalni ekstrem u točki* $(3/4, 27/32)$.

c) Provjerite da li je tražena krivulja G dobivena sa $a = 2$. *Proučite ovu krivulju i nacrtajte njezin graf u koordinatnom sustavu u ravnini.*

d) U istom sustavu nacrtajte graf krivulje G' *jednadžbe* $y = f'(x)$ *nakon što ste posebno odredili koordinate zajedničkih točaka* G *i* G'.

e) Postoji očit odnos između grafova G i G'. *Koji?*

Druga pojava na koju želimo ukazati, osim maturalnih ispita, jesu natjecanja iz matematike. U Italiji ova vrsta natjecanja ne izaziva tako veliko zanimanje kao što možemo primijetiti kod učenika u hrvatskim školama. Italija se počinje natjecati tek 1967 g. na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi, a postalo je skoro kao pravilo da nikada nije zauzela neku značajniju i višu poziciju na svjetskoj ljestvici. Pokazat ćemo primjerima zašto je tako. U talijanskim gimnazijama je uistinu teško i neobično pronaći nastavnika koji bi posvetio svoje vrijeme pripremajući učenika za natjecanje iz matematike, uostalom učenici na natjecanja odlaze iz radoznalosti, svojevoljno.

I sami zadaci drugačije su strukturirani od onih u Hrvatskoj, kako za osnovnoškolce tako i za srednjoškolce. Na natjecanjima viših srednjih škola zadaci su koncipirani za "juniore" i "seniore". Juniorska natjecanja su za učenike prva dva razreda i odvijanjem su ograničena na prostor samih škola te i dobro plasirani učenici ne odlaze na sljedeću razinu natjecanja jer ne postoji. Seniorsko natjecanje odnosi se na polaznike triju završnih godina više srednje škole; natjecanje nije vezano za nastavne planove i programe pa se zbog nejednakog i nepovezanog načina pripreme natjecatelja oslanja na sposobnosti razmišljanja i intuiciju svakog pojedinog učenika (znači, nije usmjereno na poznavanje tehnika rješavanja zadataka). Učenik mora riješiti dvadesetak problema od kojih većina ima odgovore algebarskog, računa vjerojatnosti ili geometrijskog karaktera, ali prisutni su i oni logičkog tipa ili pak oni vezani uz matematizaciju, kao u ovim primjerima koji slijede.

Juniorsko natjecanje 1993.

Budilica ujaka Paška svakog sata kasni po 8 minuta. U 22:00 sata Paško prije spavanja namješta budilicu; na koliko sati treba namjestiti budilicu da ga probudi sutra ujutro u 08:30?

a) 09:54;
b) 09:22;
c) 07:06;
d) 07:22;
e) nemoguće je.

Seniorsko natjecanje 1993.

Neki matematičari izučavali su "posebne" prirodne brojeve, čiju definiciju ne poznajemo, pri tom su dokazali sljedeće niže navedene teoreme. Jedan od tih teorema uključuje sve ostale. Koji?

a) postoji beskonačno mnogo neparnih brojeva koji nisu posebni;

b) postoji beskonačno mnogo neparnih brojeva i beskonačno mnogo parnih brojeva koji nisu posebni;

c) za svaki poseban broj s postoji jedan prirodan broj n takav da je $n > s$;

d) postoji samo jedan poseban broj koji je neparan;

e) niti jedan poseban broj ne može imati više od 1000 znamenaka.

Opraštamo se s vama ostavljajući vas sa zadacima kojima ćete sami pronaći rješenja, i u mislima u kojima ćete usporediti svoja iskustva s talijanskima.

Rješenja iz prošlog broja:

11.

$$\begin{array}{rcrcr} 36 & \times & 3 & = & 108 \\ + & & \times & & : \\ 6 & - & 4 & = & 2 \\ \hline 42 & + & 12 & = & 54 \end{array}$$

12.

$$\begin{array}{rcrcr} 55 & \times & 8 & = & 440 \\ + & & + & & : \\ 2 & \times & 5 & = & 10 \\ \hline 57 & - & 13 & = & 44 \end{array}$$

JOHN VON NEUMANN *(1903. – 1957.) čuveni je američki matematičar mađarskog podrijetla. Utemeljitelj je "Teorije igara", a svojim je radovima izravno utjecao na razvitak elektroničkih računala. Von Neumann je imao neobičnu sposobnost računanja "u glavi", pa je napamet izvodio i one račune za koje je drugima i uz uporabu računala trebalo podosta vremena.*

Jednom je zgodom imao prometni udes nakon kojeg je prijateljima pričao: "S moje desne strane vrlo su uredno promicala stabla brzinom 90km/h. No odjednom mi se jedno ispriječilo na putu.

U jednom svojem popularno–znanstvenom predavanju John von Neumann je rekao da je matematika samo mali i sasvim jednostavni dio života. Kad se iz publike nato začuo žamor, on je dodao: "Ako ljudi u to ne vjeruju, to je zbog toga što ne shvaćaju koliko je složen život."