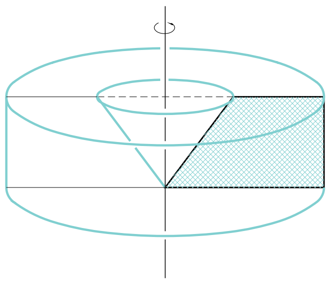
O problemu određivanja težišta geometrijskih likova

Ela Rac Marinić Kragić, Zagreb

Kako se u drugom razredu gimnazije obrađuje stereometrija, tako se srećemo i sa problemom izračunavanja volumena rotacijskih tijela. Već tada, ili u trećem razredu kod primjene trigonometrije u stereometriji spominje se (a u prirodoslovno-matematičkoj gimnaziji i detaljnije obrađuje) Guldinovo pravilo: *Ako lik površine P rotira oko osi p koja je u ravnini lika i ne siječe taj lik, onda je volumen dobivenog tijela jednak $P \cdot s$, pri čemu je s put koji je prevalilo težište lika* (vidi [4]). Isti poučak možemo naći i na str. 418 [5] pod nazivom Papussov teorem i glasi: *Neka je R dio ravnine i L pravac u toj ravnini koji ili ne dodiruje R ili prolazi njegovim rubom. Tada je volumen tijela nastalog rotacijom R oko L jednak umnošku puta kojim se zarotiralo težište od R i površine od R.*

Kako odrediti put koji prevali težište lika? Izgleda posve jednostavno. No, ne bi vjerovali koliko se tu pitanja može postaviti i koliko pogrešaka učiniti.

Na razmišljanja navedena u ovom članku natjerao me učenik rješavajući zadatak 8.212 [6]: *Pravokutni trapez vrti se oko osi koja je okomita na osnovicu i prolazi vrhom šiljastog kuta. Duljine osnovica trapeza su 4 cm i 7 cm, a duljina kraka 5 cm. Izračunaj obujam nastalog rotacijskog tijela.*



Slika 1.

Volumen je tijela jednak razlici volumena valjka s polumjerom baze 7 cm i visinom 4 cm te stošca kojem je polumjer baze 3 cm i visina 4 cm. Dakle, volumen iznosi 184π cm^3. No, učenik je došao na elegantnu ideju da primjeni Guldinovo pravilo (čemu računati dva volumena i oduzimati kada možeš izračunati odmah). Tako je (vidi sliku 1) uzeo da je težiste četverokuta

$$x_T=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\frac{0+7+7+3}{4}=\frac{17}{3}.$$

Težište bi rotacijom opisalo kružnicu duljine $2\cdot\frac{17}{3}\cdot\pi$ pa bi volumen nastalog tijela bio $2\cdot\frac{17}{3}\cdot\pi\cdot 22=\frac{748}{3}\pi$, gdje je 22 površina zadanog trapeza.

Što tu nije u redu? Naravno, odmah pomišljamo da su to koordinate težišta danog trapeza. Pa idemo "prekopati" po literaturi koja nam je dostupna. Zadatak 431 [1] definira težište skupa S točaka $A_i(x_i, y_i)$, $i=1,2,3,4$ kao presjek težišnica tog skupa koje su zadane kao generalizacija težišnice u trokutu, a samo težište opisano na taj način imalo bi koordinate $x_T=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$, $y_T=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}$. Naime, uzmemo po tri točke, nađemo težište tako odabranog trokuta i spojimo sa četvrtom točkom. Dobivena dužina nazvana je težišnicom skupa S. Sve se četiri težišnice sijeku u jednoj točki – težištu skupa S. Težište dijeli težišnicu u omjeru $3:1$ računajući od vrha.

Sve je ovo točno dok smo samo na skupu od četiri točke. Međutim, ako promatramo četverokut određen s četiri točke, gornje tvrdnje su pogrešne. Naime, sve vrijedi, osim što tako dobivena točka nije fizičko težište četverokuta. Postoji točka koja se dobije kao presjek gore opisanih težišnica, ta točka dijeli težišnice u omjeru $3:1$ gledano od vrha, za njene koordinate vrijedi $x_T=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$, $y_T=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}$ i ona je jedinstvena. Ta bi točka bila poopćenje težišta trokuta na četverokut. Samo, **to nije težište četverokuta**. Takve se generalizacije mogu napraviti za sve n-terokute. Navedene će tvrdnje i formule za koordinate težišta vrijediti samo za centralno simetrične mnogokute. Samo kod njih za koordinate težišta vrijede formule $x_T=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, $y_T=\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}$. Unatoč tome, zadatak 48. stranica 246 [2] **pogrešno** definira težište četverokuta na gore opisan način.

Napomena: ono što vrijedi na konačnom skupu od n točaka ne mora nužno vrijediti i na mnogokutu kojem su te točke vrhovi.

"Prekopavam" dalje ne bih li našla što kaže vektorski račun. Pa uspijevam u zadatku 1.62 [3] i njegovom rješenju naći da za težište P mnogokuta $A_1A_2\ldots A_n$ vrijedi $\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{PA_k}=\vec{0}$, što je analogno definiciji četverokuta u [2], i opet **pogrešno** definirano. Ima li tomu kraja?

Razmišljajući dalje o tom problemu dolazim do zaključka da je pogrešnim generalizacijama koordinata težišta trokuta došlo do pogrešaka u [2], [3], ... Sve što je rečeno o inkriminiranoj točki s koordinatama $x_T=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, $y_T=\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}$ je točno: jedinstvena je, sjecište je gore opisanih "težišnica", njenim spajanjem sa vrhovima mnogokuta nastaju vektori čiji je zbroj nulvektor. Osim jedne sitnice. **To nije težište mnogokuta.** Pa kako doći do težišta zadanog mnogokuta? U tablicama Bronštejn – Semendjajev, stranica 497, odnosno u definiciji na stranici 702 [5] naći ćemo sljedeće formule: $x_T=\frac{\int_S x\,dS}{S}$, $y_T=\frac{\int_S y\,dS}{S}$, gdje je $\int_S$ plošni integral po površini lika S. Kad bi htjeli računati koordinate težišta (dovoljno je apscisu) pomoću integrala, u našem primjeru postavlja se pitanje ima li smisla primjena Guldinovog pravila i što je lakše. Tim više što učenici trećeg razreda ne mogu koristiti integralni račun. Ipak, prezentacije radi, izračunajmo koordinate težišta na gore ponuđen način. Trapez je omeđen pravcima $y=0$, $y=4$, $y=\frac{4}{3}x$ $(x=\frac{3}{4}y)$ i $x=7$ (vidi sliku

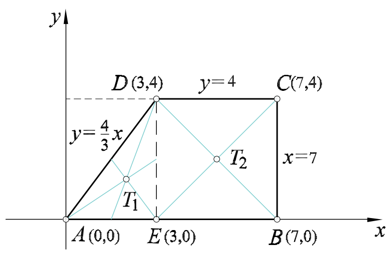
2). Njegova je površina 22 cm^2. Računamo

$$\begin{aligned}
\int\limits_S x dS &= \int\limits_0^3 \int\limits_0^{\frac{4}{3}x} x dy dx + \int\limits_3^7 \int\limits_0^4 x dy dx \\
&= \int\limits_0^3 x dx [y]_0^{\frac{4}{3}x} + \int\limits_3^7 x dx [y]_0^4 \\
&= \int\limits_0^3 x \cdot \frac{4}{3} x dx + \int\limits_3^7 4x dx \\
&= \frac{4}{3} \int\limits_0^3 x^2 dx + 4 \int\limits_3^7 x dx \\
&= \frac{4}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 + 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^7 = 92,
\end{aligned}$$

a kako je površina trapeza 22, to je apscisa težišta $x_T = \frac{92}{22} = \frac{46}{11}$. Tada je volumen tijela prema Guldinu $2\pi \cdot \frac{46}{11} \cdot 22 = 184\pi$ i napokon evo točnog rezultata. Usput, ordinata težišta računala bi se ovako:

$$\begin{aligned}
\int\limits_S y dS &= \int\limits_0^4 \int\limits_{\frac{3}{4}y}^7 y dx dy \\
&= \int\limits_0^4 y(7 - \frac{3}{4}y) dy \\
&= \int\limits_0^4 (7y - \frac{3}{4}y^2) dy = 40,
\end{aligned}$$

pa je $y_T = \frac{40}{22} = \frac{20}{11}$, što nama u zadatku ne treba.



Slika 2.

Kako izračunati koordinate težišta bez upotrebe integrala? Moramo podijeliti mnogokut na manje dijelove čija težišta znamo izračunati. To znači na trokute ili centralno simetrične mnogokute. Naš ćemo trapez podijeliti kao i kod integralnog izračunavanja na pravokutan trokut i kvadrat i smjestiti u pravokutni koordinatni sustav kao na slici 2. Sada nađemo koordinate težišta trokuta $T_1\left(2, \frac{4}{3}\right)$ i kvadrata $T_2(5, 2)$. Za težište trapeza sada vrijedi $x_T = \frac{x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2}{S}$, gdje su x_1, x_2 apscise težišta trokuta i kvadrata, a S_1, S_2 njihove površine, dok je S površina trapeza. Dakle $x_T = \frac{2 \cdot 6 + 5 \cdot 16}{22} = \frac{92}{22} = \frac{46}{11}$. Analogno za ordinatu težišta nalazimo $y_T = \frac{y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2}{S} = \frac{\frac{4}{3} \cdot 6 + 2 \cdot 16}{22} = \frac{40}{22} = \frac{20}{11}$, $T\left(\frac{46}{11}, \frac{20}{11}\right)$. Ovaj je drugi način primjeren učenicima i lak za računanje.

Dakle, težište svakog mnogokuta možemo odrediti podijelivši mnogokut na trokute ili neke druge centralno simetrične mnogokute kojima lako odredimo težišta te primjenjujemo formule

$$x_T = \frac{x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2 + \ldots + x_l \cdot S_l}{S},$$

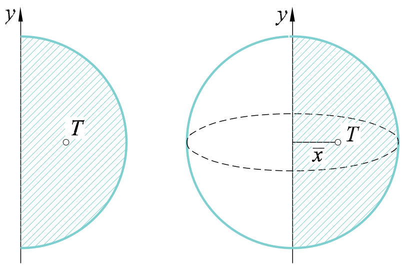
gdje su x_i, $i = 1, \ldots, l$ apscise težišta pojedinih dijelova, a S_i, $i = 1, \ldots, l$ pripadne površine, dok je S površina čitavog mnogokuta;

$$y_T = \frac{y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2 + \ldots + y_l \cdot S_l}{S},$$

gdje su y_i, $i = 1, \ldots, l$ ordinate težišta pojedinih dijelova. O načinu podjele mnogokuta ne ovise koordinate njegovog težišta, pa je na nama da izaberemo najelegantniji način podjele zadanog mnogokuta na manje dijelove kojima je lakše izračunati koordinate težišta. Ja bih ipak preporučila primjenu Guldinovog pravila na centralnosimetrične mnogokute — npr. zgodan je primjer romb koji rotira oko osi što prolazi jednim vrhom okomito na dijagonalu kao u zadatku 8.209 [6] (težište je u sjecištu dijagonala) ili druge simetrične likove (npr. rotacija kruga i sl.).

Kad sam se već zabavljala težištima i Guldinovim pravilom, evo još jednog simpatičnog primjera:

Zadatak. Nađi težište polukruga polumjera r (Primjer 5, stranica 415 [5]).



Slika 3.

Površina polukruga je $\frac{r^2\pi}{2}$. Volumen je kugle $\frac{4}{3}r^3\pi$. Kugla nastaje rotacijom polukruga polumjera r na slici 3 oko y osi. Težište je od y osi udaljeno za $\overline{x}$ i rotacijom opiše kružnicu duljine $2 \cdot \overline{x}\pi$, pa prema Guldinovom pravilu vrijedi: $\frac{4}{3}r^3\pi = 2\pi\overline{x} \cdot \frac{r^2\pi}{2}$ te je $\overline{x} = \frac{4r}{3\pi}$.

Rješenja iz prošlog broja:

15.

$$\begin{array}{rcrcr} 52 & \times & 3 & = & 156 \\ + & & \times & & : \\ 8 & - & 6 & = & 2 \\ \hline 60 & + & 18 & = & 78 \end{array}$$

16.

$$\begin{array}{rcrcr} 96 & \times & 8 & = & 768 \\ + & & + & & : \\ 46 & - & 42 & = & 4 \\ \hline 142 & + & 50 & = & 192 \end{array}$$

Literatura

[1] Pavković, Veljan, *Matematika 1, zbirka zadataka za prvi razred srednjih škola*, Školska knjiga, Zagreb.

[2] D. Veljan, V. Volenec, *Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[3] A. Marić, *Vektori, zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb, 1997.

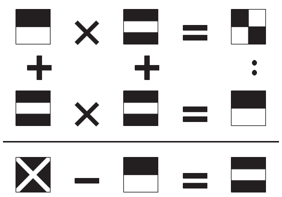
[4] B. Dakić, N. Elezović, *Udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazije*, Element, Zagreb, 1999.

[5] Sherman K. Stein, *Calculus and analytic geometry*, McGraw–Hill book company, New York.

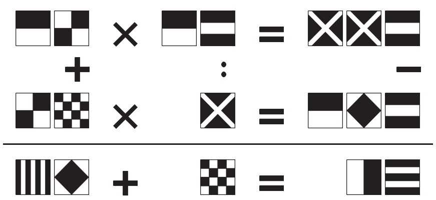
[6] B. Dakić, *Matematika 2, zbirka zadataka iz matematike za 2. razred gimnazije*, Element, Zagreb, 1996.

Zamijenite simbol odgovarajućom znamenkom!

17.



18.



19.