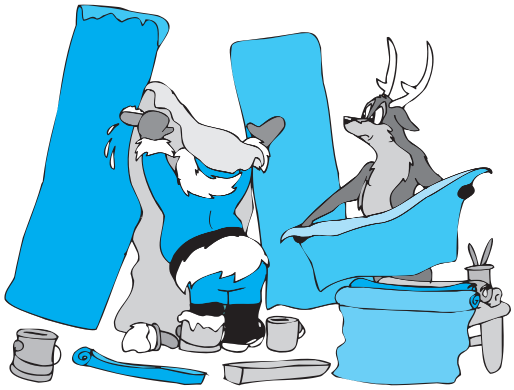
Primjene metode ploština u dokazivanju nekih poučaka



Anđelko Marić, Sinj

Dokaz metodom ploština[*] sastoji se u tome da se, iz odnosa ploština nekih likova, dobiju odnosi među drugim veličinama tih likova. To je, u biti, vrlo jednostavna metoda, u pravilu s isto tako jednostavnim i kratkim postupkom dokaza.

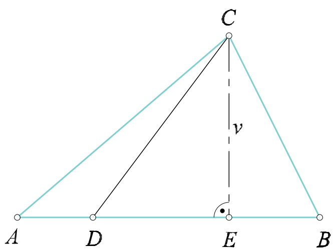
U članku će se dokazati neki planimetrijski poučci, od kojih se neki dokazuju (nekom drugom metodom) već u osnovnoj, a većina ostalih u srednjoj školi.

Na kraju će se tom metodom, što nije uobičajeno, dokazati nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja.

1. Poučak o spojnici vrha i točke na nasuprotnoj stranici trokuta

Spojnica vrha i bilo koje točke nasuprotne stranice dijeli trokut na dva trokuta čije su ploštine u omjeru u kojem ta točka dijeli stranicu.

Dokaz. Prema oznakama na sl. 1., treba dokazati da vrijedi $P_{ACD} : P_{BCD} = |AD| : |BD|$. Trokuti ACD i BCD imaju zajedničku visinu iz vrha C, čija je duljina $|CE| = v$. Zato je $P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot v$, $P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot v$, a odatle $P_{ACD} : P_{BCD} = |AD| : |BD|$.



Sl. 1.

2. Poučak o težišnici trokuta

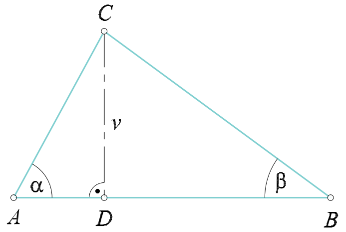
Težišnica trokuta dijeli trokut na dva trokuta jednakih ploština.

Dokaz. Ako je točka D na sl. 1. polovište stranice $\overline{AB}$, tada je dužina $\overline{CD}$ težišnica trokuta ABC i, zbog $|AD| = |BD|$, prema poučku 1., vrijedi $P_{ACD} = P_{BCD}$.

[*] Pitanje, zašto dati prednost riječi **ploština** (u značenju u kojem se ovdje rabi) umjesto uobičajenije riječi **površina** zaslužuje posebnu raspravu. Držim da obje riječi imaju mjesto u hrvatskom matematičkom nazivlju, ali nisu istoznačnice. Ploština je mjera površine. O tome, možda, više nekom drugom prigodom. Uostalom, neka ovo bude poticaj za raspravu.

3. Poučak o nožištu visine trokuta

Nožište visine iz jednog vrha trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru kotangensa unutarnjih kutova trokuta uz tu stranicu.

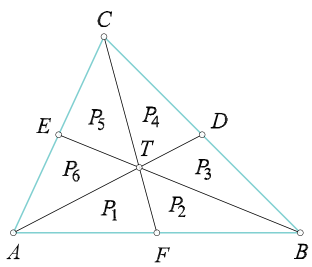


Sl. 2.

Dokaz. Kako je (vidi sl. 2.) $|AD| = v \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, $|BD| = v \cdot \operatorname{ctg}\beta$, to je, prema poučku 1., $|AD| : |BD| = \operatorname{ctg}\alpha : \operatorname{ctg}\beta$, što je tvrdnja poučka.

4. Poučak o trokutima na koje je zadani trokut podijeljen težišnicama

Težišnice trokuta dijele trokut na šest trokuta jednakih ploština.



Sl. 3.

Dokaz. Težišnice $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ trokuta ABC dijele taj trokut na šest trokuta, čije smo ploštine označili kao na sl. 3.

Dužina $\overline{TF}$ je težišnica trokuta ABT. Zato je, prema poučku 2., $P_1 = P_2$. Iz istog razloga je $P_3 = P_4$ i $P_5 = P_6$. Prema istom poučku vrijedi: $P_1+P_5+P_6 = P_2+P_3+P_4$, odakle je $2P_5 = 2P_6 = 2P_3 = 2P_4$, odnosno $P_3 = P_4 = P_5 = P_6$.

Isto tako $P_1 + P_2 + P_3 = P_6 + P_5 + P_4$, odakle je $2P_1 = 2P_4 = 2P_5 = 2P_6$. Zbog svega toga je: $P_1{=}P_2{=}P_3{=}P_4{=}P_5{=}P_6$.

Q.E.D.

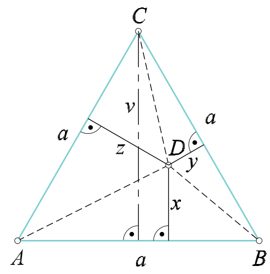
5. Poučak o težištu trokuta

Težište trokuta dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1, mjereći od vrha trokuta.

Dokaz. Uz oznake kao na sl. 3., a prema poučku 1. vrijedi: $|AT| : |DT| = P_{ABT} : P_{BDT} = (P_1 + P_2) : P_3$. Kako prema poučku 4. vrijedi $P_1 = P_2 = P_3$, to je $|AT| : |DT| = 2 : 1$, čime je (za jednu težišnicu) poučak dokazan. Na isti način se dokaže i za ine dvije težišnice.

6. Poučak o unutarnjoj točki jednakostranična trokuta

Zbroj udaljenosti bilo koje točke unutar jednakostranična trokuta od stranica trokuta ne ovisi o izboru te točke i jednak je duljini visine trokuta.



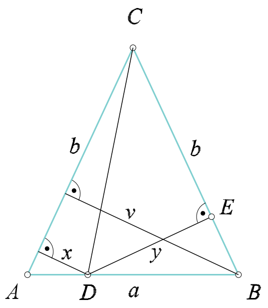
Sl. 4.

Dokaz. Neka je unutar jednakostranične trokuta ABC, duljine stranice a, dana bilo koja točka D, treba dokazati, uz oznake na sl. 4., da vrijedi $x + y + z = v$, gdje je v duljina visine trokuta, to jest $v = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Kako je $P_{ABD} + P_{BCD} + P_{ACD} = P_{ABC}$, ili $\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}az = \frac{1}{2}av$, to je $x+y+z = v$, što je tvrdnja poučka.

7. Poučak o točki na osnovici jednakokračna trokuta

Zbroj udaljenosti bilo koje točke na osnovici jednakokračna trokuta od krakova trokuta ne ovisi o izboru te točke i jednak je duljini visine na krak toga trokuta.

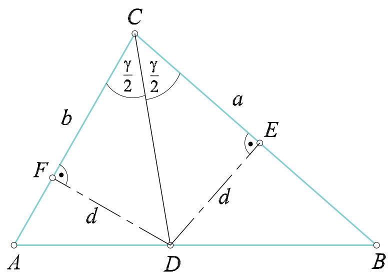
Dokaz. Koristimo oznake na sl. 5. Treba dokazati da je $x + y = v$. Vrijedi: $P_{ACD}+P_{BCD} = P_{ABC}$, odnosno $\frac{1}{2}bx+\frac{1}{2}by = \frac{1}{2}bv$, ili $x + y = v$, što je trebalo i dokazati.



Sl. 5.

8. Poučak o simetrali unutarnjeg kuta trokuta

Simetrala unutarnjeg kuta trokuta, povučena iz jednog vrha trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru duljina inih dviju stranica.



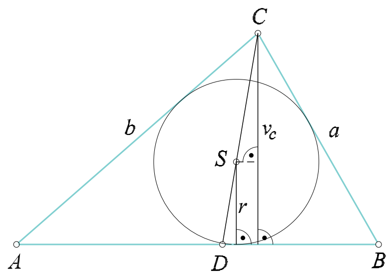
Sl. 6.

Dokaz. Koristimo: svaka točka simetrala kuta jednako je udaljena od krakova kuta. Zato je (vidi sl. 6.) $|DE| = |DF| = d$. Zato je $P_{ACD} = \frac{1}{2}bd$, $P_{BCD} = \frac{1}{2}ad$, a odatle, prema poučku 1. dobijemo $|AD| : |BD| = \frac{1}{2}bd : \frac{1}{2}ad$, ili $|AD| : |BD| = b : a$. Time je poučak dokazan.

9. Poučak o središtu trokutu upisane kružnice

Središte trokutu upisane kružnice dijeli odsječak simetrale kuta unutar trokuta u omjeru zbroja duljina dviju stranica koje imaju zajednički vrh na toj simetrali i duljine treće stranice.

Dokaz. Uvedemo li oznake kao na sl. 7., treba dokazati da vrijedi $|CS| : |SD| = (a+b) : c$. Zbog sličnosti vrijedi $\frac{|CD|}{|SD|} = \frac{v_c}{r} \Longrightarrow \frac{|CS|+|SD|}{|SD|} = \frac{v_c}{r} \Longrightarrow \frac{|CS|}{|SD|} + 1 = \frac{v_c}{r} \Longrightarrow \frac{|CS|}{|SD|} + 1 = \frac{\frac{2P}{c}}{\frac{P}{S}} = \frac{2s}{c}$.

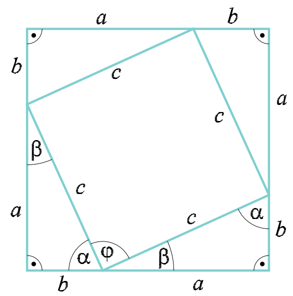


Sl. 7.

Dalje je: $\frac{|CS|}{|SD|} = \frac{a+b+c}{c} - 1 = \frac{a+b}{c} + \frac{c}{c} - 1 = \frac{a+b}{c}$, ili $|CS| : |SD| = (a+b) : c$, čime je poučak dokazan.

10. Pitagorin poučak

Zbroj kvadrata duljina kateta jednak je kvadratu duljine hipotenuze pravokutna trokuta.



Sl. 8.

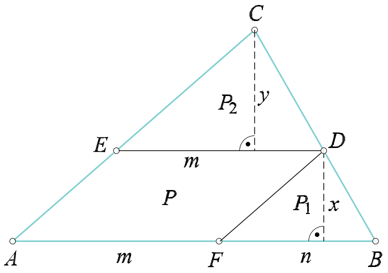
Dokaz. Svaku stranicu kvadrata podijelimo na dva dijela čije smo duljine označili kao na sl. 8. Na taj način je kvadrat podijeljen na četiri trokuta i jedan četverokut. Budući su trokuti pravokutni i međusobno sukladni s duljinama kateta a i b, to su duljine stranica četverokuta jednake duljini hipotenuze tih trokuta, koju smo označili sa c. Zato je taj četverokut romb. Označimo li jedan (bilo koji) kut toga četverokuta s φ, tada vrijedi

$\alpha + \varphi + \beta = 180°$. Kako je $\alpha + \beta = 90°$, to je $\varphi = 90°$. Zato je taj romb kvadrat.

Ploština polaznog kvadrata jednaka je $P = (a + b)^2$. Zbrojimo li ploštine dijelova toga kvadrata, dobijemo: $P = 4 \cdot \dfrac{ab}{2} + c^2 = 2ab + c^2$. Izjednačavanjem tih izraza za ploštinu, dobit ćemo: $(a + b)^2 = 2ab + c^2$, $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$, $a^2 + b^2 = c^2$, što je tvrdnja Pitagorina poučka.

11. Poučak o ploštinama paralelograma i dvaju trokuta na koji je podijeljen trokut

Ako se bilo kojom točkom jedne stranice trokuta povuku usporednice s inim dvjema stranicama, time je trokut podijeljen na jedan paralelogram i dva trokuta i vrijedi: ploština paralelograma jednaka je dvostrukoj geometrijskoj sredini ploština trokuta.

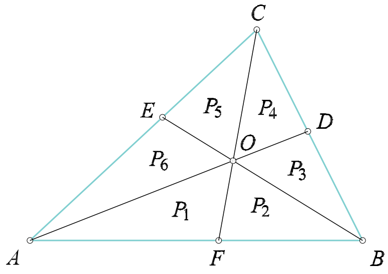


Sl. 9.

Dokaz. Trokut na sl. 9. zadovoljava uvjete poučka i treba dokazati da vrijedi: $P = 2\sqrt{P_1P_2}$. Za pojedine ploštine vrijedi: $P = mx$, $P_1 = \dfrac{1}{2}nx$, $P_2 = \dfrac{1}{2}my$. Zbog sličnosti vrijedi $n : x = m : y \implies ny = mx$. Zato je $P_1P_2 = \dfrac{1}{2}nx \cdot \dfrac{1}{2}my = \dfrac{1}{2}mx \cdot \dfrac{1}{2}ny = \dfrac{1}{2}mx \cdot \dfrac{1}{2}mx = \left(\dfrac{1}{2}mx\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}P\right)^2$, odakle je $P = 2\sqrt{P_1P_2}$, što je tvrdnja poučka.

12. Cevin poučak

Ako je O bilo koja točka unutar trokuta ABC i pravci AO, BO i CO sijeku stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama D, E i F, tada vrijedi: $\dfrac{|AF|}{|BF|} \cdot \dfrac{|BD|}{|CD|} \cdot \dfrac{|CE|}{|AE|} = 1.$



Sl. 10.

Dokaz. Koristimo oznake kao na sl. 10. Prema poučku 1. vrijedi: $\dfrac{|OF|}{|OC|} = \dfrac{P_1}{P_5 + P_6} = \dfrac{P_2}{P_3 + P_4}$, a odatle je $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{P_5 + P_6}{P_3 + P_4}$. Isto je tako $\dfrac{P_3}{P_4} = \dfrac{P_1 + P_2}{P_5 + P_6}$, $\dfrac{P_5}{P_6} = \dfrac{P_3 + P_4}{P_1 + P_2}$. Množenjem ovih jednakosti dobijemo:

$$\frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{P_3}{P_4} \cdot \frac{P_5}{P_6} = \frac{P_5+P_6}{P_3+P_4} \cdot \frac{P_1+P_2}{P_5+P_6} \cdot \frac{P_3+P_4}{P_1+P_2} = 1. \qquad (*)$$

Kako je $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{|AF|}{|BF|}$, $\dfrac{P_3}{P_4} = \dfrac{|BD|}{|CD|}$, $\dfrac{P_5}{P_6} = \dfrac{|CE|}{|AE|}$, to $(*)$ prelazi u $\dfrac{|AF|}{|BF|} \cdot \dfrac{|BD|}{|CD|} \cdot \dfrac{|CE|}{|AE|} = 1$, što je tvrdnja koju je trebalo dokazati.

13. Van Aubelov poučak

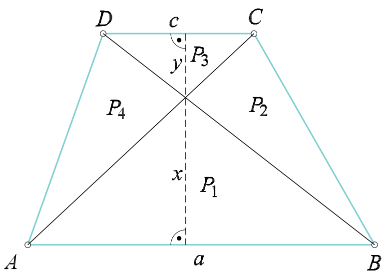
Ako je O bilo koja točka unutar trokuta ABC i pravci AO, BO i CO sijeku stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ *i* $\overline{AB}$ redom u točkama D, E i F, tada vrijedi: $\dfrac{|AO|}{|DO|} = \dfrac{|AF|}{|BF|} + \dfrac{|AE|}{|CE|}$, $\dfrac{|BO|}{|EO|} = \dfrac{|BF|}{|AF|} + \dfrac{|BD|}{|CD|}$, $\dfrac{|CO|}{|FO|} = \dfrac{|CE|}{|AE|} + \dfrac{|CD|}{|BD|}$.

Dokaz. Koristimo oznake kao na sl. 10. Vrijedi: $\dfrac{P_1 + P_2}{P_6} = \dfrac{|BO|}{|EO|} = \dfrac{P_3 + P_4}{P_5}$, ili $P_3P_6 + P_4P_6 = P_1P_5 + P_2P_5$. Dalje je $P_3^2P_6 + P_3P_4P_6 = P_1P_3P_5 + P_2P_3P_5$. Kako je, vidi $(*)$ u dokazu poučka 12., $P_1P_3P_5 = P_2P_4P_6$, to je $P_3^2P_6 + P_3P_4P_6 = P_2P_3P_5 + P_2P_4P_6$. Podijelimo li ovu jednakost s $P_2P_3P_6$, dobijemo: $\dfrac{P_3}{P_2} + \dfrac{P_4}{P_2} = \dfrac{P_5}{P_6} + \dfrac{P_4}{P_3} \implies \dfrac{P_3 + P_4}{P_2} =$

$\dfrac{P_5}{P_6}+\dfrac{P_4}{P_3}$, a odatle (prema poučku 1.), slijedi $\dfrac{|CO|}{|FO|}=\dfrac{|CE|}{|AE|}+\dfrac{|CD|}{|BD|}$. Istim se postupkom (ili kružnim zamjenama) dobiju i ine dvije formule poučka.

14. Poučak o trokutima koje određuju po jedan krak i dijagonale trapeza

Dijagonale trapeza dijele trapez na četiri trokuta. Ploštine trokuta uz krakove trapeza su međusobno jednake.



Sl. 11.

Dokaz. Ploštine trokuta na koji je podijeljen trapez označimo kao na sl. 11. Treba dokazati da je $P_2=P_4$. Vrijedi $P_1+P_2=\frac{1}{2}ax$, $P_1+P_4=\frac{1}{2}ax$, odakle je $P_2=P_4$, što je tvrdnja poučka.

15. Poučak o trokutima koje određuju po jedna osnovica i dijagonale trapeza

Dijagonale trapeza dijele trapez na četiri trokuta. Za ploštinu trapeza P i za ploštine P_1 i P_3 trokuta uz osnovice trapeza vrijedi: $P=(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_3})^2$.

Dokaz. Koristimo sl. 11., pri čemu je $x+y=v$. Zbog sličnosti vrijedi: $a:x=c:y \implies ay=cx$. Vrijedi: $P_1+P_2=\frac{1}{2}av \implies P_2=\frac{1}{2}av-\frac{1}{2}ax=\frac{1}{2}a(v-x)=\frac{1}{2}ay$, to jest $P_2=\frac{1}{2}ay=\frac{1}{2}cx$. Kako je, prema poučku 14., $P_2=P_4$, to je $P_2P_4=\frac{1}{2}ay\cdot\frac{1}{2}cx=\frac{1}{2}ax\cdot\frac{1}{2}cy=P_1P_3 \implies P_2=P_4=\sqrt{P_1P_3}$. A zbog $P=P_1+P_2+P_3+P_4$, to je $P=P_1+P_3+2\sqrt{P_1P_3}=(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_3})^2$, što je tvrdnja poučka.

16. Nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine

Za pozitivne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ broj $A=\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ zove se aritmetička, a broj $G=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$ geometrijska sredina tih brojeva i vrijedi $A\geq G$, pri čemu vrijedi jednakost samo ako je $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Dokaz. Provest ćemo dokaz metodom ploština, za $n=3$.

Promatrajmo bilo koja tri pozitivna broja x_1, x_2 i x_3 i označimo $x_1+x_2+x_3=s$. Neka je $y_1=s-x_1$, $y_2=s-x_2$, $y_3=s-x_3$. Vrijedi: $y_1+y_2=2s-x_1-x_2>2s-x_1-x_2-x_3=s>y_3$. Isto je tako $y_2+y_3>y_1$, $y_3+y_1>y_2$. Zato postoji trokut čije su duljine stranica y_1, y_2 i y_3. Kako je opseg toga trokuta $y_1+y_2+y_3=3s-(x_1+x_2+x_3)=2s$, to je njegova ploština, prema Heronovoj formuli: $P_1=\sqrt{s(s-y_1)(s-y_2)(s-y_3)}=\sqrt{sx_1x_2x_3}$.

Jednakostraničan trokut jednakog opsega $(2s)$ ima duljinu stranice $a=\dfrac{2s}{3}$. Zato je ploština toga trokuta $P_2=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{s^2\sqrt{3}}{9}$.

Kako od svih trokuta jednakog opsega najveću ploštinu ima jednakostraničan, to je $P_2\geq P_1 \implies \dfrac{s^2\sqrt{3}}{9}\geq\sqrt{sx_1x_2x_3} \implies \dfrac{s^4}{27}\geq sx_1x_2x_3 \implies \left(\dfrac{s}{3}\right)^3\geq x_1x_2x_3 \implies \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\geq\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$, što je nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine za $n=3$.

Jednakost u dokazanoj nejednakosti vrijedi samo ako je i prvi trokut jednakostraničan, to jest ako je $y_1=y_2=y_3$, a odatle $x_1=x_2=x_3$. Time je postavljena tvrdnja u potpunosti dokazana.