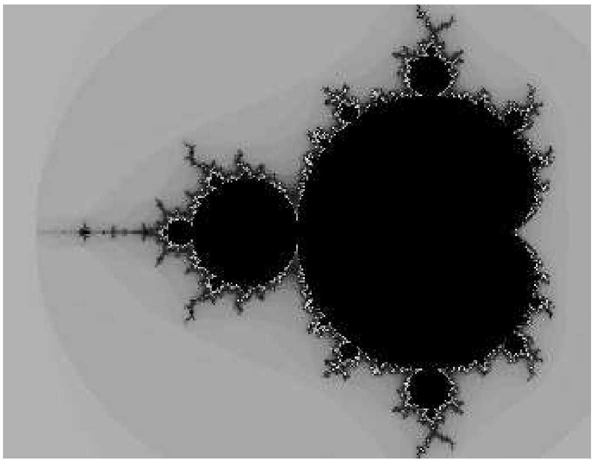
Čudesne slike fraktala

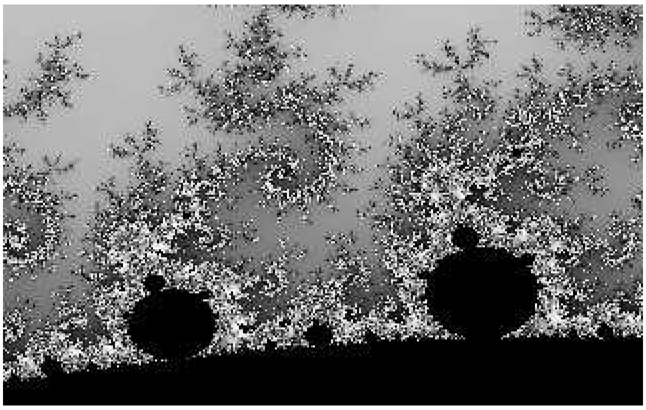
Šime Šuljić, Pazin

Geometrija koju proučavamo kroz osnovnoškolsku i srednjoškolsku nastavu matematike euklidska je geometrija. Točke, dužine, pravci, trokuti, kružnice, geometrijska tijela. . . savršeni su oblici, za koja su još Pitagorejci tvrdili da ih ne možemo nacrtati, već ih možemo vidjeti samo "duhovnim okom". Iako su poučci starogrčke matematike u današnjem, tehničkom svijetu itekako korisni i primjenljivi, činjenica je da se prirodne pojave i oblici mogu samo približno opisivati euklidskim objektima. Na primjer, naša Zemlja samo je približno kugla. Biljarska kuglica bi možda bila hrapavija od naše planete kada bi se "svela" na istu veličinu. Površinu ispod zakrivljene, ali savršeno glatke parabole možemo izračunati Arhimedovom metodom niza pravokutnika, ali da bismo izračunali fascinantno veliku površinu čovjekovih pluća treba pozvati u pomoć fraktalnu geometriju.



Programom nastave matematike nije obuhvaćena geometrija fraktala. U srednjoj školi bi trebalo bar naznačiti njeno postojanje, radi opisivanja stvarnih prirodnih pojava i oblika. Upravo zbog fraktalne geometrije matematika posljednjih godina nalazi primjenu i u znanostima poput biologije i medicine. Zadivljujuće slike fraktala mogu kod učenika pobuditi zainteresiranost za matematiku. Tko može ostati ravnodušan kad pogleda prizore Mandelbrotovog skupa!? Kako se kompjutorskim "mikroskopom" povećavaju satelitske mrvice glavnog tijela, otkriva se sličnost s početnim oblikom, a opet otkriva i neka razlika. Matematičari su dokazali da su sve te raspršene čestice oko glavnog tijela međusobno povezane!

Pregledavajući oblike koji sliče na mjehuriće, spiralne bodlje, lepeze, repove morskog konjica... može se "potrošiti" cijeli ljudski vijek. Već je to samo po sebi dovoljno da se ovaj dio matematike pokuša približiti učenicima u učionici, a ne da postoji samo u stručnim časopisima. Postalo je uobičajeno da se fraktalne slike pojavljuju u nematematičkim časopisima i publikacijama, ukrašuju Internet stranice i razne kompjutorske aplikacije itd. Važno je znati da u pozadini svega stoje matematičke formule.

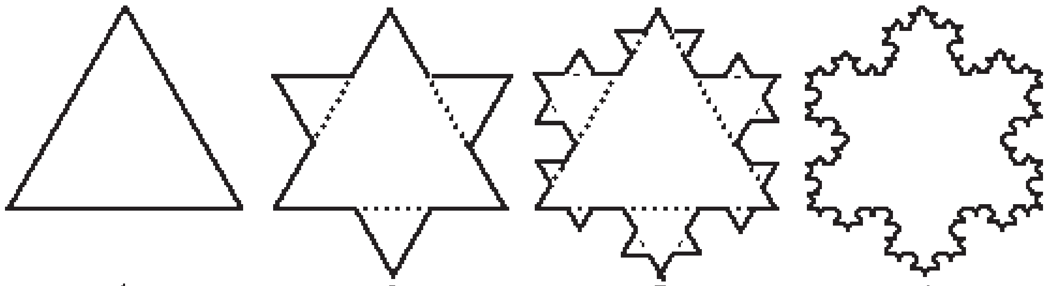


Kroz bar dvije teme u nastavnom programu matematike srednje škole može se izravno govoriti o geometriji fraktala. To su **kompleksni brojevi** u drugom razredu i **beskonačni geometrijski red** u četvrtom razredu srednje škole. U drugom se razredu uče računske operacije s kompleksnim brojevima i njihov prikaz u kompleksnoj ravnini. Podsjetimo se definicije: za neku točku kompleksne ravnine, kojoj je pridružen kompleksni broj $z = a + bi$, reći ćemo da pripada Mandelbrotovom skupu ako je niz iteracija ograničen:

$$0, \quad z, \quad z^2+z, \quad (z^2+z)^2+z, \quad ((z^2+z)^2+z)^2+z, \quad (((z^2+z)^2+z)^2+z)^2+z, \ldots$$

Potrebno bi, dakle bilo, još objasniti učeniku pojam ograničenosti. Naravno, za ovakav izračun i prikaz skupa potrebno je računalo. I sam Benoit Mandelbrot, koji je 1975. godine skovao naziv fraktal, radio je kao kompjutorski stručnjak i uz pomoć računala otkrio skup koji nosi ime njemu u čast. U osnovi, točke zaslona računala koje pripadaju Mandelbrotovom skupu crtamo crnom bojom i tako dobivamo poznat oblik skupa. Međutim, programeri će točki koja u k-toj iteraciji ne zadovolji kriterij ograničenosti pridružiti i k-tu boju i tako dobivamo fascinantnu ljepotu okoline skupa. Podrobnije je to opisano u *Matematičko-fizičkom listu* br.2/XLV.

Kada se rješava zadatke vezane uz beskonačni geometrijski niz, vrlo je zgodno postaviti pitanje površine i opsega "snježne pahuljice" tj. Kochove krivulje nad jednakostraničnim trokutom. "Snježna pahuljica" nastaje od jednakostraničnog trokuta duljine stranice a. Na srednjoj trećini svake stranice konstruirajmo nove jednakostranične trokute duljine stranica $\frac{a}{3}$. Izbrišimo osnovice novonastalih trokuta. Nad srednjim trećinama svih 12 novih stranica konstruirajmo nove jednakostranične trokute itd. Već kod četvrtog koraka imamo sljedeći rezultat:



1. 2. 3. 4.

Ako se iterativni postupak ponavlja do beskonačnosti, odgovor na pitanje o opsegu i površini jest čudo: beskonačna krivulja sklupčana u ograničenu površinu! Može se, naime, pokazati da je niz površina (osim prvog člana):

$$a^2\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 a^2\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad 12\left(\frac{1}{9}\right)^2 a^2\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad 48\left(\frac{1}{27}\right)^2 a^2\frac{\sqrt{3}}{4}, \ldots$$

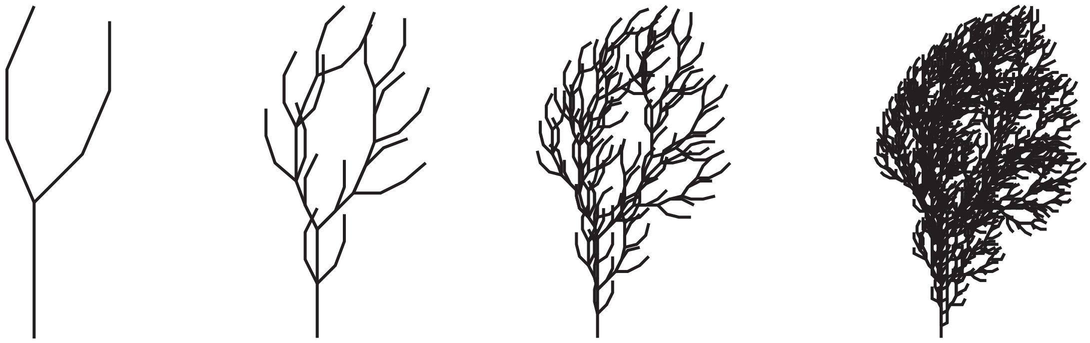
konvergentni geometrijski niz s kvocijentom manjim od 1. S druge strane niz opsega divergentan je geometrijski niz.

Osim izravnog vezivanja ovog zanimljivog područja matematike uz matematičke nastavne teme, može se fraktale obraditi kroz maturalni rad ili prikazati na razrednom panou. U svakom slučaju ove teme zahtijevaju obilje slikovnog materijala. Kako doći do njega? Internet je uvijek dobro rješenje, međutim, upišemo li riječ "fraktal" u neki pretražitelj mogli bismo iznutra upoznati teoriju kaosa. Živo zanimanje internetovske populacije potvrđuje nam i servis *HotBot* na Mreži (`http://www.HotBot.com`), koji za ključnu riječ fraktal daje četrdesetak tisuća informacija.

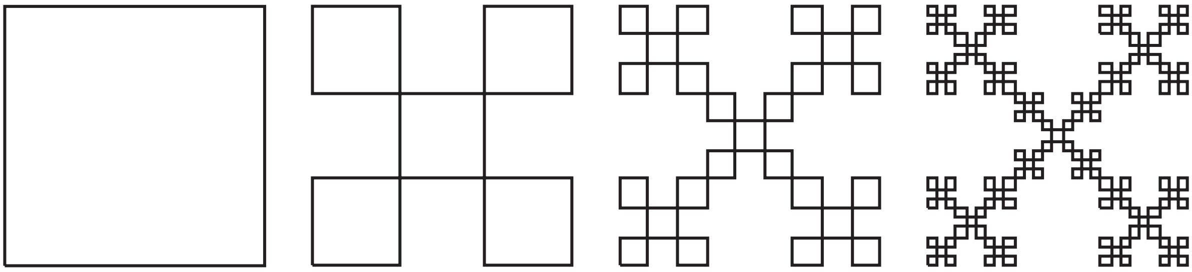
Većina nastavnika matematike ne zna tako dobro neki od programskih jezika da bi mogli stvoriti efektne slike, niti ima potrebe za tim. Može se uzeti neki već gotov program kakav je npr. *Fractint*. To je odličan i besplatan program, kojeg možete slobodno "skinuti" s adrese: `http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html`. Nezaobilazan je za sve one koji se ozbiljnije žele pozabaviti fraktalima. Zanimljiv je i po tome što je na njemu radilo pedesetak autora i koautora, koji ga stalno dorađuju i dopunjuju. Internet stranice na kojima se nalazi najbolje je polazište za surfanje po Internetu u potrazi za fraktalima. Kuriozitet je "site" pod naslovom *Fraktal dana*, koji donosi svaki dan novi fraktal. Mnoštvo fraktalnih skupova, s mogućnošću mijenjanja njihovih izgleda lako je dobiti programima *Ultra Fractal 2.0* i *Fractal Explorer 1.2*, koji se nalaze na CD-u časopisa Bug br. 11/99 i br. 10/2000. Nedostatak tih programa je što su sharware-i tj. funkcioniraju ograničeno vrijeme, ako se ne odlučimo na kupnju.

Za učionicu mi se čini solidan i sasvim dovoljan izbor freeware *Winfeed* matematičara *Richarda Parrisa* sa *Phillips Exeter Academy* (`http://math.exeter.edu/rparris`). Program može crtati Mandelbrotov i Julijin skup, Newtonov fraktal, Poincareov dijagram i bifurkaciju, najpoznatije IFS fraktale i fraktalne krivulje i sl. Upravo sve one ilustracije koje idu uz uvod u teoriju determinističkog kaosa i gotovo ništa izvan toga što bi moglo samo dezorijentirati.

U “helpu” se nalaze dobra objašnjenja matematičkih preslikavanja ili transformacija. Različite varijacije fraktala mogu se dobiti promjenom parametara formula u naredbama *Edit* ili *Adjust*. Fraktalne krivulje mogu se crtati korak po korak uporabom naredbe *Next* i tako dobiti prikaz u stripu. Za ilustraciju pogledajmo nekoliko iteracija “grma”.



Program *Weenfeed* “downloadira” se kroz pet-šest minuta, zauzima svega 446 KB memorije računala i radi sasvim zadovoljavajuće na staroj 486-ici, kakve po mnogim školama skupljaju prašinu. Možda bi bilo dobro pokoje takvo računalo postaviti u matematičku učionicu. U svakom slučaju s ovim se “programčićem” može napraviti obilje tiskanog materijala, u boji ili crno-bijeloj tehnici, bilo na papiru ili prozirnicama. Naše srednje škole imaju dovoljno printera, pa ih treba iskoristiti i za božanski lijepe slike matematike.



Literatura

1. Gleick, James: *Kaos — rađanje nove znanosti* (prijevod s engleskog), Izvori, Zagreb 1996.
2. Uglešić, Nikica: *Fraktali i dimenzija*, Zbornik radova 3. susreta nastavnika matematike, Element, Zagreb 1996.
3. Lopac, Vjera: *Fizika kaosa — nova revolucija u znanosti*, Matematičko-fizički list br. 1 i 2, god. 1992/93.
4. Vuković, Ivica: *Mandelbrotov skup*, Matematičko-fizički list br. 2, god. 1994/95.
5. Slijepčević, Siniša: *Kako napraviti fraktal?*, Matematičko-fizički list br. 4, god. 1995/96.
6. Sotirov, Renata i Taslidžić, Vedran: *Opseg i površina snježne pahuljice*, Matematičko-fizički list br. 2, god. 1998/99.