Dokaz

Zdravko Kurnik, Zagreb

U prošlom broju časopisa "Matematika i škola", u članku [3], razmatrana su osnovna pitanja obrade pojma poučka ili teorema: precizno formuliranje teorema $P \Longrightarrow Q$ i moguće preformuliranje, jasno razlikovanje pretpostavke P i tvrdnje Q i razumijevanje njihove uloge u gradnji teorema $P \Longrightarrow Q$, obrat $Q \Longrightarrow P$ teorema $P \Longrightarrow Q$ i njegova formulacija, formulacija negacije $\rceil A$ neke izjave A.

Ostalo je nerazjašnjeno još pitanje dokazivanja teorema. Da bismo lakše razumjeli metodiku dokazivanja teorema, potrebno je odmah na početku jasnije opisati predmet izučavanja: *dokaz*. Što je dokaz? O dokazu u strogom smislu pri izgradnji određene matematičke teorije (aritmetika, planimetrija, stereometrija, teorija vjerojatnosti, teorija grupa i dr.) dade se govoriti samo u okvirima nekog sustava aksioma. Kratak opis takve izgradnje sadrži također članak [3]. A odgovor na gornje pitanje možemo sažeto izreći ovako:

Dokaz teorema $P \Longrightarrow Q$ u nekoj teoriji je takav konačan niz tvrdnji $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ teorije u kojem

a) svaka tvrdnja je ili aksiom, ili je dobivena iz prethodno dokazanih tvrdnji toga niza po nekom pravilu zaključivanja,

b) posljednja tvrdnja niza je tvrdnja Q.

Dokazati teorem $P \Longrightarrow Q$, prema tome, znači *pronaći* konačan niz tvrdnji Q_1, $Q_2, \ldots, Q_n$ teorije i logičkim zaključivanjem prijeći od uvjeta iz pretpostavke P i tvrdnji $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$ do tvrdnje $Q_n = Q$. Dokazana tvrdnja Q postaje nakon toga sastavni dio svakog daljnjeg postupka dokazivanja.

Začetnik postupka dokazivanja je, kao što znamo, otac grčke matematike *Tales* (oko 624. – 548. p. K.), ali njegov dokaz još nije logički strog. Dokaz u matematiku uvodi *Pitagora* (oko 570. – 497. p. K.), a strogi dokaz rabi i *Euklid* (oko 330. – 275. p. K.). U njegovim "Elementima" aksiomi, definicije i poučci nižu se pravilno i primjereno i čine savršen logički sustav.

* * *

Budući da su matematika kao znanost i matematika kao nastavni predmet danas usko povezane, to i dokazivanje poučaka ima svoje važno mjesto u nastavi matematike. Posebno su važni dokazi geometrijskih poučaka, jer oni učenicima pružaju pravu priliku upoznavanja ideje strogog zaključivanja. Ovdje se neizbježno nameće pitanje: treba li dokaze upoznavati i shvaćati i onaj učenik koji se kasnije u svakodnevnom životu neće baviti matematikom, ili za njegovu životnu djelatnost matematika neće biti od neke posebne važnosti? Odgovor se lako može naslutiti iz sljedeće nepobitne istine: **učiti dokazivati** znači **učiti rasuđivati**, a to je jedan od osnovnih zadataka nastave matematike. Rasuđivati u životu treba svaki čovjek. Kako inače usporediti različite tvrdnje, izdvojiti iz više izjava one koje su istinite, provjeriti valjanost nekog sumnjivog dokaza, opovrgnuti nečije mišljenje, donijeti ispravan zaključak o nečemu i sl.? Da, učiti dokazivati treba svaki učenik. Zato obrazovanje učenika nije potpuno ako on tijekom školovanja nije upoznao i shvatio dokaze nekoliko standardnih matematičkih poučaka.

Poučavanje dokazivanja poučaka za nastavnika matematike je velik izazov, jer to očito nije ni jednostavno ni lagano. Naročito što on pri tome mora imati na umu nekoliko važnih činjenica:

1) Iako je matematika deduktivna znanost, školska matematika ne izgrađuje se ni na jednoj razini nastave kao strog deduktivni sustav, već ostaje u okvirima modela. Ovo pogotovo vrijedi za nastavu matematike u osnovnoj školi, jer je ona većim dijelom induktivna. Mnogi poučci obrađuju se u njoj bez dokaza.
2) U školskim dokazima neizbježni su intuitivni elementi. Ako je neki poučak jednostavan i tvrdnja gotovo očigledna, učenici teško shvaćaju zašto se to mora još i dokazivati.
3) Učenici mnogo lakše prihvaćaju logički dokaz u manje očiglednim primjerima. Takav dokaz je teži, ali u njemu se povezuje više različitih činjenica. Povezane činjenice lakše se pamte, stečeno znanje postaje trajnije.

* * *

Prijeđimo sada na sam postupak dokazivanja. Postoje dvije vrste dokaza teorema: *direktni dokazi* i *indirektni dokazi*.

A) Direktni dokazi

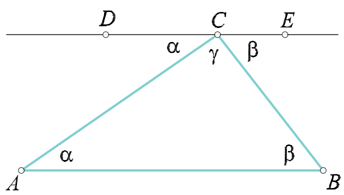
Direktni dokaz neke tvrdnje Q sastoji se u tome da se polazeći od pretpostavke P, primjenom aksioma, definicija i ranije dokazanih teorema, nizom ispravnih logičkih zaključivanja dođe do Q. Tada je implikacija $P \Longrightarrow Q$ istinita. Većina poučaka u nastavi matematike dokazuje se na ovaj način.

Navest ćemo nekoliko poučaka iz nastave matematike ili s matematičkih natjecanja čiji se direktni dokazi temelje na vrlo jasnim i prilično uočljivim činjenicama.

Primjer 1. *Zbroj kutova u svakom trokutu jednak je* $180°$.

Dokaz. Pogledajmo koje činjenice trebamo za opravdanje tvrdnje.

Najprije vrhom C trokuta ABC povlačimo paralelu DE s pravcem AB. Povlačenje ove paralele omogućuje nam aksiom o paralelama euklidske geometrije koji kaže da se točkom izvan danog pravca može povući jedinstven pravac paralelan s danim pravcem.



Zatim uočavamo da kutovi $\sphericalangle DCA$ i $\sphericalangle BAC$, odnosno $\sphericalangle BCE$ i $\sphericalangle CBA$ imaju paralelne krakove. Prema ranije usvojenom poučku o kutovima s paralelnim krakovima vrijedi $\sphericalangle DCA = \sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle BCE =$

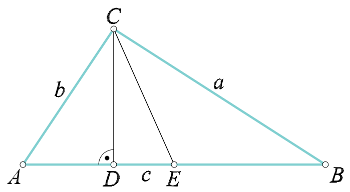
$\sphericalangle CBA = \beta$. Te kutove možemo promatrati i kao izmjenične kutove uz presječnicu paralelnih pravaca.

Kutovi $\sphericalangle DCA$, $\sphericalangle BCE$ i $\sphericalangle ACB$ zajedno tvore ispruženi kut, pa je konačno $\sphericalangle DCA + \sphericalangle BCE + \sphericalangle ACB = \alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Primjer 2. *U trokutu ABC duljine stranica a, b i c povezuje jednakost $a + b = 2c$, $a > b$. Iz vrha C povučene su visina $\overline{CD}$ i težišnica $\overline{CE}$. Dokažite da je $|DE| = a - b$.*

(Državno natjecanje 1992. godine, VIII. razred)

Dokaz. Na slici lako uočavamo dva pravokutna trokuta ACD i BCD s duljinama stranica $|CD|$, $\frac{c}{2} - |DE|$ i b, odnosno $|CD|$, $\frac{c}{2} + |DE|$ i a.



Prirodno se nameće primjena Pitagorina poučka. Za duljinu $|CD|$ zajedničke stranice tih trokuta dobivamo

$$|CD|^2 = b^2 - (\frac{c}{2} - |DE|)^2,$$

$$|CD|^2 = a^2 - (\frac{c}{2} + |DE|)^2.$$

Izjednačavanjem desnih strana i sređivanjem dobivene jednakosti nalazimo da je $2c|DE| = a^2 - b^2$, a odavde uvažavanjem početnog uvjeta slijedi tražena jednakost $|DE| = a - b$.

Napomena. Iako se ne čini da je ovaj dokazni zadatak težak, na natjecanju potpuno su ga riješila samo 4 učenika od njih 40, a čak 35 učenika osvojilo je manje od 50% bodova. Od toga broja 6 učenika nije osvojilo ni bod.

Primjer 3. *Dokažite da se iz skupa sa 52 bilo koja prirodna broja mogu odabrati barem dva broja tako da je ili njihov zbroj ili njihova razlika djeljiva sa 100.*

Dokaz. Formulacija ovog dokaznog zadatka sadrži riječcu *barem*. Na što ona u prvi mah može podsjetiti? Na **Dirichletov princip**: *Ako konačan skup sa $n + 1$ elemenata razdijelimo bilo kako u n podskupova, onda postoji podskup koji sadrži barem 2 elementa.* Zaista, Dirichletov princip je u ovom slučaju ona teorijska činjenica koja omogućuje dokaz tvrdnje.

Promatraju se 52 bilo koja prirodna broja, $n + 1 = 52$. Da bismo mogli primijeniti Dirichletov princip, potrebno je sve prirodne brojeve razvrstati u 51 podskup, $n = 51$! Način na koji to treba učiniti proizlazi iz uvjeta zadatka da ili zbroj ili razlika dva broja bude djeljiva sa 100, tj. da ili zbroj ili razlika završava sa 00. Prema tome, pri gradnji podskupova pozornost treba usmjeriti na dvoznamenkaste završetke prirodnih brojeva. Tako će, na primjer, brojevi 453, 1 847, 92 647 očito pripadati jednom podskupu ($453 + 1\,847 = 2\,300$, $453 + 92\,647 = 93\,100$, $92\,647 - 1\,847 = 90\,800$). Tu leži zametak ideje da se svi prirodni brojevi razvrstavaju u podskupove prema sljedećim dvoznamenkastim završecima: 00, 01 i 99, 02 i 98, 03 i 97, . . . , 49 i 51, 50. Dobivamo ukupno 5l podskup. Kako imamo 52 broja, po Dirichletovom principu barem dva broja moraju pripadati istom podskupu. Ta dva broja zadovoljavaju uvjet zadatka.

Primjer 4. *Dokažite da za svaka dva pozitivna broja p i q vrijedi nejednakost $(p^2 + p + l)(q^2 + q + 1) \geq 9pq$.*

(Državno natjecanje 1994. godine, I. razred)

Dokaz. Ako se poznaje osnovni postupak pri dokazivanju algebarskih nejednakosti, onda se gornja tvrdnja može brzo opravdati. U tom postupku mišljenje se najprije usmjerava na otkrivanje lako uočljivog načina dokazivanja, zatim se pomišlja na primjenu nekih jednostavnih i posebnih nejednakosti, a u krajnjem slučaju primjenjuje se analitičko–sintetička metoda svođenja na očiglednu nejednakost. Pogledajmo ostvarenja raznih zamisli:

a) Lako se vidi da je $p^2+p+1 \geq 3p$, $q^2+q+1 \geq 3q$. Množenjem ovih nejednakosti odmah slijedi tražena nejednakost.

b) Prikladna transformacija lijeve strane nejednakosti daje $(p^2+p+1)(q^2+q+1) = [(p-1)2+3p][(q-1)^2+3q] \geq 9pq$.

c) Nakon dijeljenja sa pq nejednakost možemo zapisati u obliku

$$(p+\frac{1}{p}+1)(q+\frac{1}{q}+1) \geq 9.$$

Valjanost ove nejednakosti proizlazi iz činjenice da za svaki pozitivni broj x vrijedi nejednakost $x+\frac{1}{x} \geq 2$.

d) Analitičko–sintetička metoda. Nejednakost transformiramo u prvom koraku na oblik $(p^2+p+1)(q^2+q+1)-9pq \geq 0$, a zatim lijevu stranu transformiramo sve dok konačno ne dobijemo očiglednu nejednakost. Imamo redom

$$\begin{aligned}
&(p^2+p+1)(q^2+q+1)-9pq\\
&= p^2q^2+p^2q+p^2+pq^2+p\\
&\qquad +q^2+q+1-8pq\\
&= (p^2q^2-2pq+1)+(p^2q-2pq+q)\\
&\quad +(pq^2-2pq+p)+(p^2+q^2-2pq)\\
&= (pq-1)^2+q(p-1)^2\\
&\qquad +p(q-1)^2+(p-q)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Napomena. Iako ovaj dokazni zadatak zaista nije težak, na natjecanju ga je u potpunosti dokazalo samo 10 učenika od njih 26. Čak 13 učenika nije osvojilo ni bod, među njima i jedan nagrađeni učenik! To ukazuje na potrebu poboljšanja priprema učenika za natjecanja.

B) Indirektni dokazi

Za razliku od direktnog dokaza teorema $P \Longrightarrow Q$, indirektnim dokazom je put od pretpostavke P do tvrdnje Q "zaobilazan". Moramo biti svjesni činjenice da rasuđivanje u indirektnom dokazu neke izjave mnogim učenicima stvara dodatne poteškoće. Razmotrit ćemo zato pobliže strukturu indirektnog dokaza.

Za svaku tvrdnju Q postoji suprotna tvrdnja $\rceil Q$. Od te dvije tvrdnje samo je jedna istinita. Indirektni dokaz teorema $P \Longrightarrow Q$ temelji se na promatranju suprotne tvrdnje $\rceil Q$ i nastojanju da se dokaže da suprotna tvrdnja nije istinita.

Preciznije:

Indirektni dokaz tvrdnje Q sastoji se u direktnom dokazu implikacije $\rceil Q \Longrightarrow L$, gdje je L neka očigledna neistina. Naime, ako je ta implikacija dokazana, ona je istinita izjava, pa kako je L neistina mora biti $\rceil Q$ neistinita izjava, a to znači Q istinita izjava.

Jednostavnije:

Polazi se od pretpostavke da vrijedi suprotna tvrdnja $\rceil Q$. Ako se tijekom dokazivanja suprotne tvrdnje $\rceil Q$ dođe u suprotnost s nekim aksiomom, ranije dokazanim teoremom ili nekom drugom istinitom činjenicom, zaključuje se da suprotna tvrdnja $\rceil Q$ nije istinita, a to znači da je tvrdnja Q teorema istinita.

Među indirektnim dokazima izdvajaju se dva koja se često primjenjuju.

Podsjetimo se da se izjava $\rceil Q \Longrightarrow \rceil P$ naziva **kontrapozicija** izjave $P \Longrightarrow Q$ i da su te dvije izjave ekvivalentne. To znači ako dokažemo istinitost prve, dokazana je i istinitost druge. Dokaz teorema $P \Longrightarrow Q$ zasnovan na toj ekvivalenciji naziva se **dokaz po kontrapoziciji**.

Ako pri dokazivanju teorema $P \Longrightarrow Q$ uz danu pretpostavku P krenemo od suprotne tvrdnje $\rceil Q$ i nizom logičkih koraka dođemo do toga da bi tada trebale istovremeno vrijediti neka izjava A i njezina negacija $\rceil A$, onda zaključujemo da suprotna tvrdnja $\rceil Q$ nije istinita, već je istinita polazna tvrdnja Q. Dokaz teorema $P \Longrightarrow Q$ zasnovan na takvom rasuđivanju naziva se **svođenje na kontradikciju (reductio ad absurdum)**.

Indirektni dokaz možemo naći već kod *Euklida* u njegovim "Elementima". Njegova omiljena metoda dokazivanja bila je upravo **reductio ad absurdum**. Pogledajmo glasoviti Euklidov dokaz teorema o skupu prostih brojeva u nešto preinačenom obliku.

Primjer 5. *Skup prostih brojeva je beskonačan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno da je skup prostih brojeva konačan, tj. da postoji najveći prosti broj p. Tada bi svi prosti brojevi bili $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots, p$. Promatrajmo broj

$$q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot p + 1.$$

Broj q veći je od broja p. On zato ne može biti prost broj, jer je prema pretpostavci p najveći prost broj. On bi morao biti složen broj i kao takav djeljiv s nekim prostim brojem iz gornjeg niza, a očito nije. Ova apsurdna situacija opovrgava suprotnu tvrdnju. Dakle, vrijedi polazna tvrdnja.

* * *

Pogledajmo sada dva primjera u kojima iz pretpostavke da vrijedi suprotna tvrdnja $\rceil Q$ dobivamo neku očiglednu neistinu L.

Primjer 6. *Ako su a i b pozitivni realni brojevi, onda je aritmetička sredina tih brojeva veća ili jednaka geometrijskoj sredini, tj.*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Dokaz. Tvrdnja se može dokazati i direktno i indirektno.

Direktan dokaz izrečenog poučka $P \Longrightarrow Q$ zasniva se na očiglednoj nejednakosti $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Nakon kvadriranja odmah slijedi tražena nejednakost. Podsjetimo se da se navedena početna nejednakost otkriva analizom (v. [1]).

Razmotrimo sada indirektni dokaz. U tu svrhu najprije zapisujemo suprotnu tvrdnju $\rceil Q : \dfrac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$. Iz nje dobivamo $a+b-2\sqrt{ab} < 0$, odnosno $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 < 0$. Ovo je očigledna neistina L! Dakle, vrijedi polazna tvrdnja.

Primjer 7. *Dokažite da ne postoje prirodni brojevi x, y, z i n takvi da je $n \geq z$ i $x^n + y^n = z^n$.*

Dokaz. Formulacija teorema je takva da može izazvati malu nedoumicu oko toga što je tu pretpostavka, a što tvrdnja. Poželjna je najprije jasnija formulacija:

Ako su x, y, z i n brojevi takvi da je $n \geq z$ i $x^n + y^n = z^n$, onda x, y, z i n nisu prirodni brojevi.

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje prirodni brojevi x, y, z i n sa traženim svojstvom. Očito je $x < z$ i $y < z$, a zbog simetričnosti možemo uzeti da je i $x < y$. Tada je

$$\begin{aligned} x^n &= z^n - y^n \\ &= (z-y)(z^{n-1}+z^{n-2y}+\ldots+zy^{n-2}+y^{n-1}) \\ &\geq 1 \cdot n \cdot x^{n-1} > x^n. \end{aligned}$$

Dobili smo da je $x^n > x^n$, a to je očigledna neistina L. Mogli bi reći i da je to apsurd. Dakle, vrijedi polazna tvrdnja.

* * *

Pogledajmo sada jedan jednostavan primjer dokaza po kontrapoziciji.

Primjer 8. *Ako je broj a^2 paran, onda je i broj a paran.*

Dokaz. Direktan dokaz izrečenog poučka $P \Longrightarrow Q$ nije vidljiv. Zato prelazimo na kontrapoziciju $\rceil Q \Longrightarrow \rceil P$. Ona glasi:

Ako je broj a neparan, onda je i broj a^2 neparan.

Nije teško direktno dokazati ovu kontrapoziciju. Neparan broj a možemo zapisati u obliku $a = 2n+1$. Sada je $a^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1 = 2m + 1$, tj. neparan broj.

Budući da su izjave $P \Longrightarrow Q$ i $\rceil Q \Longrightarrow \rceil P$ ekvivalentne, to iz istinitosti druge slijedi istinitost prve.

* * *

Najpoznatiji poučak školske matematike čiji se dokaz svodi na kontradikciju opisat ćemo u narednom primjeru.

Primjer 9. *$\sqrt{2}$ je iracionalan broj.*

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi suprotna tvrdnja $\rceil Q$: *$\sqrt{2}$ je racionalan broj.* U tom se slučaju $\sqrt{2}$ može zapisati u obliku $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $D(p,q) = 1$. Iz toga prikaza slijedi $p^2 = 2q^2$, tj. p^2 je paran broj, a na temelju primjera 8 onda zaključujemo da je i p paran broj, $p = 2n$. Dalje imamo redom $p^2 = 2q^2$, $4n^2 = 2q^2$, $q^2 = 2n^2$, tj. q^2 je paran broj, a onda opet na temelju primjera 8 zaključujemo da je i q paran broj. To znači da je $D(p,q) \neq 1$.

Polazeći od suprotne tvrdnje $\rceil Q$ došli smo do toga da istovremeno vrijede izjava $A : D(p,q) = 1$ i njezina negacija $\rceil A : D(p,q) \neq 1$. To je kontradikcija! Dakle, suprotna tvrdnja $\rceil Q$ nije istinita, vrijedi polazna tvrdnja Q.

* * *

U stereometriji mogu se naći mnogi poučci koji se dokazuju indirektno. Kao posljednji primjer navest ćemo indirektni dokaz jednog takvog poučka koji je neposredna posljedica aksioma. Podsjetimo se da su za izgradnju stereometrije potrebna, uz aksiome planimetrije, još samo sljedeća tri aksioma:

(A1) *Ako su dane tri točke, onda postoji bar jedna ravnina koja sadrži te točke.*

(A2) *Ako ravnina sadrži dvije različite točke pravca, onda ona sadrži taj pravac.*

(A3) *Ako su α i β dvije različite ravnine, onda je njihov presjek $\alpha \cap \beta$ ili prazan skup ili pravac.*

Primjer 10. *Ako su A, B, C tri točke prostora koje ne pripadaju istom pravcu, onda postoji jedinstvena ravnina koja sadrži te točke.*

Dokaz. Formulacija poučka je primjerena, jer se jasno vidi što je pretpostavka P a što tvrdnja Q. Prema prvom aksiomu stereometrije postoji bar jedna ravnina π koja sadrži točke A, B, C. Neka je φ bilo koja ravnina koja sadrži točke A, B, C. Tvrdimo da je nužno $\varphi = \pi$. Pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi $\rceil Q : \varphi \neq \pi$. Kako je $A \in \pi$, $A \in \varphi$, to presjek $\varphi \cap \pi$ nije prazan skup, pa prema trećem aksiomu stereometrije proizlazi da je taj presjek pravac. Međutim, točke A, B, C pripadaju i jednoj i drugoj ravnini, što znači da pripadaju tom pravcu. To je suprotnost, $\rceil P$, pretpostavci P da točke A, B, C ne pripadaju jednom pravcu. Zato suprotna tvrdnja $\rceil Q$ nije istinita, vrijedi polazna tvrdnja Q.

Iako je izjava (A1) općenitija i pogodnija za aksiom, često se u udžbenicima umjesto nje kao aksiom uzima izjava iz ovog primjera.

* * *

U procesu dokazivanja poučaka važnu ulogu igraju pitanja koja nastavnik postavlja učenicima. Već je više puta istaknuto da je *umijeće postavljanja pitanja* jedan od oblika nastavnikove kreativnosti. Neka su pitanja standardna i stalno se ponavljaju, ali su važna i nezaobilazna, dok druga ovise o trenutku i umješnosti nastavnikovog vođenja dijaloga. Određeno usmjeravanje mišljenja učenika i pojačavanje pozornosti na dokaz poučka može se uspješno potaknuti nekim od sljedećih nastavnikovih pitanja:

Je li sve jasno u formulaciji poučka? Što je pretpostavka u poučku? Od koliko se dijelova sastoji uvjet pretpostavke? Možete li raščlaniti uvjet na dijelove? Što treba dokazati? Što je tvrdnja poučka? Kako glasi *suprotna tvrdnja? Koje bi činjenice mogle pomoći pri dokazivanju poučka? Možete li naći vezu između ovog poučka i nekog ranije dokazanog poučka? Jeste li iskoristili sve dijelove uvjeta iz pretpostavke? Jesmo li način dokazivanja već koristili kod nekog drugog poučka? Jesmo li dokazivali srodan poučak? Možete li dokazati poučak na drugi način? Kako glasi obrnuta tvrdnja? Vrijedi li obrnuta tvrdnja?*

Svaki puta kada nastavnik priprema dokaz nekog poučka za naredni sat matematike potrebno je da dobro promisli o izboru primjerenih pitanja, iz navedene skupine ili vlastitih novih pitanja, jer se, kao što smo vidjeli, dokazivanje poučaka ubraja u teža mjesta obrade novog nastavnog gradiva. A i krajnji rezultat može se lako pretpostaviti: dobro i brzo sagledavanje poučka od strane učenika, uspješno vođenje metode razgovora i ostvarenje postavljenog cilja nastavnog sata.

* * *

Na kraju, radi potpunijeg uvida u problematiku, navodimo približan broj poučaka osnovnoškolske i srednjoškolske matematike, dobiven pregledom niza udžbenika koji se rabe ili su se rabili u nastavi:

Matematika 5 (48), Matematika 6 (37), Matematika 7 (14), Matematika 8 (33), Matematika 1 (57), Matematika 2 (34), Matematika 3 (31), Matematika 4 (71).

Literatura

[1] Z. Kurnik, *Analiza*, Matematika i škola 2 (1999), 54–64.

[2] Z. Kurnik, *Matematički zadatak*, Matematika i škola 7 (2000), 51–58.

[3] Z. Kurnik, *Poučak ili teorem*, Matematika i škola 8 (2001), 101–105.

[4] G. Polya, *Kako ću riješiti matematički zadatak* (prijevod s engleskog), Školska knjiga, Zagreb 1956.

Sve treba dokazati, a kod dokaza ne možemo upotrijebiti ništa osim aksioma i dokazanih teorema.

(B. Pascal)

* * *

Logika koja može dati sigurnost je instrument dokaza, intuicija je instrument invencije.

(J. H. Poicaré)

* * *

Dobro poučava onaj koji dobro razlikuje probleme.

(latinska poslovica)