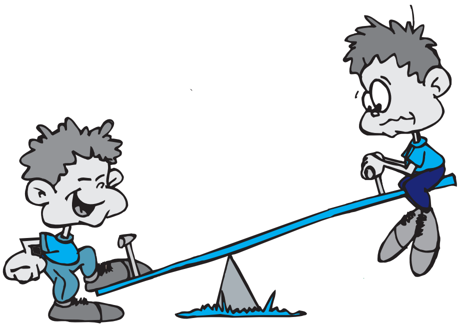


O težištima višekuta

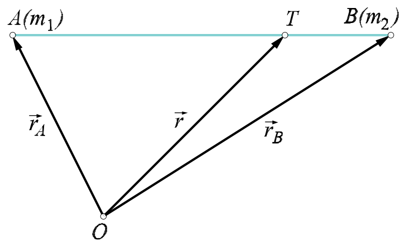
Anđelko Marić, Sinj

U MŠ-u br. 7. objavljen je članak Ele Rac Marinić Kragić pod naslovom *O problemu određivanja težišta geometrijskih likova*. Autorica ukazuje na nejedinstvenost definiranja težišta ravninskih likova, točnije višekuta.

Kad se, o tome, malo ozbiljnije razmisli, uvidi se da neke stvari u metodici nastave matematike za koje se općenito drži da su u najboljem redu, nisu u potpunom međusobnom suglasju. Radi se o definiciji težišta trokuta, a time i težišta bilo kojeg višekuta.

Težište je prvotno fizikalni pojam. Prvi koji je proučavao i izračunavao težišta likova i tijela bio je Arhimed (oko 287. – 212. prije r. Kr.). O tome čitatelj može više naći u knjizi: B. Pavković – P. Mladinić *Arhimedova metoda težišta*, HMD – ŠK, Zagreb, 1998.

Temeljni zakon pri proučavanju težišta jest Arhimedov zakon poluge, koji glasi: Težište T sustava dviju materijalnih točaka A i B, masa m_1 i m_2, nalazi se na spojnici tih točaka, pri čemu vrijedi: $|TA| : |TB| = m_2 : m_1$, odnosno $m_1 \cdot |TA| = m_2 \cdot |TB|$, ili u vektorskom obliku $m_1 \cdot \overrightarrow{AT} = m_2 \cdot \overrightarrow{TB}$. Po (fizikalnoj) definiciji težišta, sustav dviju materijalnih točaka $\{A(m_1), B(m_2)\}$ može se zamijeniti materijalnom točkom $T(m_1+m_2)$, koja je težište sustava tih točaka.



Sl. 1.

Ako je O bilo koja točka prostora, tada za radijvektore $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ i $\vec{r}$ točaka A, B i T vrijedi (vidi sl. 1.): $\vec{r} = \vec{r}_A + \overrightarrow{AT}$, $\vec{r} = \vec{r}_B - \overrightarrow{TB}$. Odavde je $m_1 \cdot \overrightarrow{AT} = m_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A)$, $m_2 \cdot \overrightarrow{TB} = m_2 \cdot (\vec{r}_B - \vec{r})$, odnosno $m_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) = m_2 \cdot (\vec{r}_B - \vec{r})$, a odatle $\vec{r} = \dfrac{m_1\vec{r}_A + m_2\vec{r}_B}{m_1 + m_2}$.

Lako se pokaže da za radijvektor težišta materijalnih točaka masa $m_1, m_2, \ldots, m_n$ i radijvektora $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ vrijedi:

$$\vec{r} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

(Dokaz se lako provede matematičkom indukcijom.)

Razumno je prihvatiti činjenicu da je težište dužine (homogenog štapa zanemarive debljine) u njezinom polovištu.

Za svaki se konveksan višekut mogu definirati četiri težišta: vršno, stranično, plošno i geometrijsko.

Ako zamislimo da se u točkama A_1, $A_2, \ldots, A_n$, od kojih nikoje tri nisu kolinearne, nalaze jednake mase, tada se težište sustava tih (materijalnih) točaka zove vršno težište višekuta $A_1A_2\ldots A_n$. Bez gubljenja na općenitosti, a zbog jednostavnijeg računa, uzima se da su u vrhovima postavljene jedinične mase.

Stranično težište višekuta definira se kao težište sustava n dužina (stranica) koje određuju taj višekut.

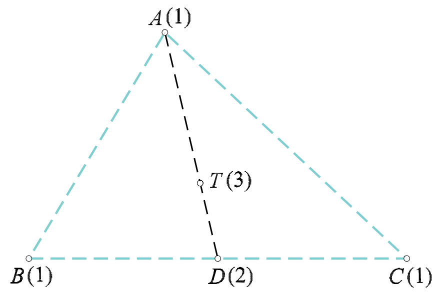
Plošno težište višekuta je, *per definitionem*, i njegovo fizikalno težište. To se težište, općenito, određuje pomoću integralnog računa. Za jednostavnije likove, ono se može odrediti i elementarno, što ćemo pokazati za trokut.

Geometrijsko se težište definira kao sjecište težišnica višekuta. Težišnice trokuta su spojnice vrha i polovišta nasuprotne stranice. Lako se pokaže da se ovako definirane težišnice sijeku u jednoj točki, koju zovemo (geometrijsko) težište trokuta. Isto se tako lako pokaže da to težište dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$, mjereći od vrha trokuta. Težišnica konveksnoga četverokuta je spojnica jednog vrha i težišta trokuta što ga određuju preostala tri vrha. I ovdje se dokaže da se težišnice sijeku u jednoj točki, koja je (geometrijsko) težište četverokuta. I tako redom. Općenito: težišnica konveksnoga $n-$terokuta je spojnica jednog vrha i težišta višekuta kojem su vrhovi preostali $n-1$ vrh promatranog višekuta. Dokaže se da se ovako definirane težišnice sijeku u jednog točki, koju zovemo (geometrijsko) težište višekuta. Također se može pokazati da ovako definirano težište dijeli svaku težišnicu višekuta u omjeru $(n-1):1$, mjereći od vrha višekuta.

Pozabavimo se sada malo s težištima trokuta.

Neka su u vrhovima trokuta ABC postavljene jedinične mase. Materijalne točke B i C možemo zamijeniti točkom D, koja je polovište dužine $\overline{BC}$ u kojoj je smještena masa 2. Zato je vršno težište T na dužini $\overline{AD}$ i za radijvektor toga težišta vrijedi (sl. 2.):

$$\vec{r}=\frac{m_A\vec{r}_A+m_D\vec{r}_D}{m_A+m_D}=\frac{\vec{r}_A+2\cdot\dfrac{\vec{r}_B+\vec{r}_C}{2}}{1+2}=\frac{\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C}{3}.$$



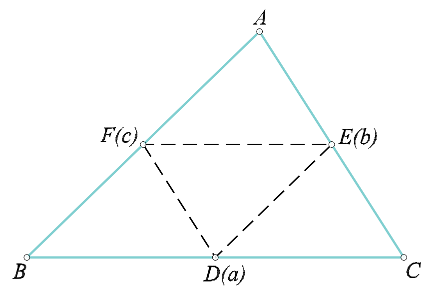
Sl. 2.

Očito je da ovo vrijedi samo ako su u vrhovima trokuta jednake mase. Inače, može se pokazati da, stavljajući u vrhove trokuta različite mase, možemo za težište sustava vrhova (što nije vršno težište trokuta) dobiti bilo koju točku unutar trokuta.

Bilo koji trokut i trokut, kojemu su vrhovi polovišta stranica toga trokuta, imaju zajedničko težište. Zaista vrijedi (v. sl. 3.):

$$\frac{\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C}{3}=\frac{\dfrac{\vec{r}_B+\vec{r}_C}{2}+\dfrac{\vec{r}_C+\vec{r}_A}{2}+\dfrac{\vec{r}_A+\vec{r}_B}{2}}{3}=\frac{\vec{r}_D+\vec{r}_E+\vec{r}_F}{3},$$

čime je tvrdnja dokazana.

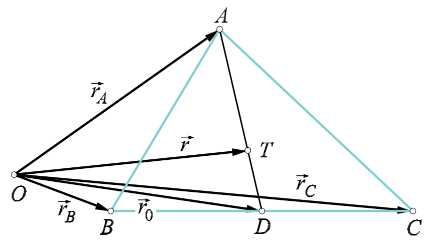


Sl. 3.

Kako doći do straničnog težišta trokuta ABC? "Mase" stranica trokuta razmjerne su duljinama stranica trokuta, zbog čega se stranično težište podudara s težištem sustava materijalnih točaka $D(a)$, $E(b)$ i $F(c)$, gdje su D, E i F polovišta stranica, a a, b i c duljine stranica trokuta, kao na sl. 3. Kako su a, b i c općenito različite duljine, to je stranično težište trokuta neka točka unutar trokuta DEF, čiji položaj zavisi o duljinama stranica trokuta. To znači da se to težište ne podudara s vršnim težištem trokuta DEF, a time ni trokuta ABC.

Odredimo radijvektor geometrijskog težišta trokuta ABC. Koristimo navedena svojstva geometrijskog težišta i uz oznake kao na sl. 4. i vrijedi:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT} = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \\ &= \vec{r}_A + \frac{2}{3}(\vec{r}_D - \vec{r}_A) = \frac{1}{3}\vec{r}_A + \frac{2}{3}\vec{r}_D \\ &= \frac{1}{3}\vec{r}_A + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C) \\ &= \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C}{3}.\end{aligned}$$



Sl. 4.

Vidimo da se geometrijsko težište trokuta podudara s njegovim vršnim težištem.

Da bismo odredili plošno, a time i fizikalno težište trokuta, koristit ćemo neke činjenice koje slijede iz onoga što je već rečeno.

Ako geometrijski lik rastavimo na n dijelova (od kojih se nikoja dva ni djelimice ne prekrivaju), čije su ploštine $P_1, P_2, \dots, P_n$, a (plošna) težišta $T_1, T_2, \dots, T_n$, tada za radijvektor težišta vrijedi:

$$\vec{r} = \frac{P_1\vec{r}_1 + P_2\vec{r}_2 + \dots + P_n\vec{r}_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n},$$

gdje su $\vec{r}_k$ radijvektori težišta T_k $(k = 1, 2, \dots, n)$.

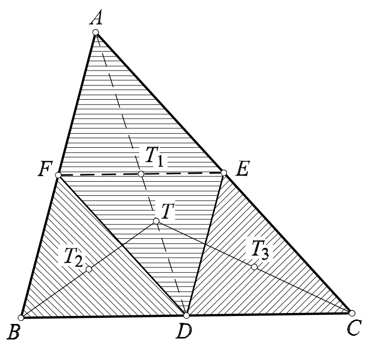
Ako sve dužine nekog skupa dužina imaju zajedničko težište, tada je to težište također težište unije tih dužina.

Težište centralnosimetričnog lika jest njegovo središte simetrije. To je zato jer to središte raspolavlja svaku dužinu koja njime prolazi, a rubovi su joj na granici lika.

Zbog toga je fizikalno težište paralelograma sjecište njegovih dijagonala.

Pokažimo sada da se fizikalno, odnosno plošno težište trokuta podudara s njegovim vršnim i geometrijskim težištem. Dovoljno je dokazati da za radijvektor i stoga težište vrijedi: $\vec{r} = \dfrac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C}{3}$.

Neka su D, E i F polovišta stranica trokuta ABC, kao na sl. 5. Trokut podijelimo na tri dijela i to: četverokut $AFDE$ i trokute BDF i CED. Lako se pokaže da je četverokut $AFDE$ paralelogram i njegovo je težište T_1 u sjecištu dijagonala. Trokut BDF je homotetičan trokutu BCA, s koeficijentom $\frac{1}{2}$ i središtem homotetije u vrhu B. Isto tako homotetija s koeficijentom $\frac{1}{2}$ i središtem u vrhu C preslikava trokut CAB u trokutu CED.



Sl. 5.

Samo se po sebi razumije da homotetija težište lika preslikava u težište njegove homotetične slike. Neka su T, T_2 i T_3 fizikalna težišta trokuta ABC, BDF i CED. Mora biti

$\overrightarrow{BT}_2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{BT}$ i $\overrightarrow{CT}_3 = \frac{1}{2}\overrightarrow{CT}$. Označimo li ploštine paralelograma i trokuta na koje je promatrani trokut podijeljen s P_1, P_2 i P_3, tada za radijvektor težišta trokuta ABC vrijedi $\vec{r} = \frac{P_1\vec{r}_1 + P_2\vec{r}_2 + P_3\vec{r}_3}{P_1 + P_2 + P_3}$, gdje su $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ i $\vec{r}_3$ radijvektori težišta T_1, T_2 i T_3. Kako je $P_1 = 2P_2 = 2P_3$, to je $\vec{r} = \frac{2\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3}{4}$.

Budući da je $\vec{r}_F = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$, $\vec{r}_E = \frac{1}{2}(\vec{r}_C + \vec{r}_A)$, to je

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{2}(\vec{r}_F + \vec{r}_E) = \frac{1}{4}(2\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C).$$

Dalje je

$$\begin{aligned}\vec{r}_2 &= \overrightarrow{OT}_2 = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BT}_2 = \vec{r}_B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BT}\\ &= \vec{r}_B + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BT} + \overrightarrow{OT}\right) = \vec{r}_B + \frac{1}{2}(\vec{r} - \vec{r}_B)\\ &= \frac{1}{2}\vec{r}_B + \frac{1}{2}\vec{r}.\end{aligned}$$

Isto se tako dobije $\vec{r}_3 = \frac{1}{2}\vec{r}_C + \frac{1}{2}\vec{r}$. Zbog svega toga je

$$\vec{r} = \frac{\frac{1}{2}(2\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C) + \frac{1}{2}\vec{r}_B + \frac{1}{2}\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{r}_C + \frac{1}{2}\vec{r}}{4}$$

$$\Longrightarrow\ 4\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}$$

$$\Longrightarrow\ \vec{r} = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C}{3},$$

čime je dokaz završen.

Vidimo da se u trokutu podudaraju vršno, geometrijsko i plošno, odnosno fizikalno težište, dok se stranično težište od njih razlikuje. To ne vrijedi i za višekute s većim brojem stranica. U četverokutu se, na primjer, podudaraju vršno i geometrijsko težište, a stranično i plošno, odnosno fizikalno se razlikuje od svakog od inih. Slično je i za višekute s većim brojem stranica.

U nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi, težište trokuta se definira kao matematički pojam i prešutno ga se poistovjećuje s fizikalnim težištem. To se katkada, po analogiji čini i za višekute s većim brojem stranica, što se ne bi smjelo. Geometrijsko i fizikalno težište višekuta su dva, po definiciji, različita pojma i treba ih razlikovati, čak i u slučajevima kada se podudaraju. To je već i Arhimed razlikovao. U *Matematičkom rječniku* Ivice Gusića na str. 12 piše: "(Arhimed) . . . dokazao je da je težište trokuta i njegovo fizikalno težište". Isto tako na str. 226 stoji: "Težište trokuta – točka u kojoj se sijeku težišnice trokuta. To je ujedno i mehaničko težište trokuta".

Vjerojatnost i broj π, još malo

Ross Honsberger, poznati kanadski matematičar u svojoj vrlo zanimljivoj knjizi Ingenuity in Mathematics piše:

Sjećam se da sam prije više godina pročitao kako je vjerojatnost da su dva slučajno odabrana prirodna broja relativno prosta jednaka $\frac{6}{\pi^2}$. *Izvjesni R. Chartres je 1904. eksperimentalno preispitivao ovu tvrdnju tako što je svaki od njegovih pedeset studenata zapisao slučajno odabranih pet parova prirodnih brojeva. Od takovih 250 parova njih 154 bilo je relativno prim, što daje vjerojatnost od* $\frac{154}{250}$, *te se iz jednadžbe* $\frac{6}{x^2} = \frac{154}{250}$ *dobije* $x = 3.12$, *dok je* $\pi = 3.14159\ldots$.