Priča o *e*

Dok povijest broja π traje skoro 4 tisuće godina, o broju e govori se tek zadnjih 400. Taj neobičan broj, manje poznat širem krugu ljudi, uživa veliki ugled među "ljudima od struke". Provjerite zašto!

Sandra Gračan, Zagreb

Nakon susreta s neobičnim brojem π u osnovnoj školi, u srednjoj nas je dočekao još jedan zanimljiv broj. Učeći o logaritmima, saznajemo da pored običnih, Briggsovih logaritama s bazom 10, postoje i tzv. **prirodni** logaritmi čija baza je broj $e = 2.71828\ldots$. Ali, što može biti prirodnije od broja 10? Otkud taj čudan broj?

Priča prva: bankarska posla

Od pamtivjeka je novac bio u centru pažnje. I kako se to često kaže, novac (i danas) okreće svijet. Steći financijsku sigurnost jedna je od osnovnih ljudskih potreba, a da ju nije lako zadovoljiti, barem je Vama jasno.

Zamislite na tren da ste uspjeli uštedjeti nešto novaca i, umjesto u čarapu, odlučite ga na neko vrijeme pospremiti u banku, nadajući se dobrim kamatama. Pretpostavimo da Vaša svota iznosi P kuna, a da je godišnja kamata r, tada računamo li s r u decimalnom obliku, krajem prve godine na računu ćete imati $P + r \cdot P = P(1 + r)$ kn, krajem druge godine $P \cdot (1 + r)^2$ kn, itd., a nakon t godina svotica će narasti na

$$S = P \cdot (1 + r)^t \text{ kn.}$$

Neke banke obračunavaju kamate dva, tri, četiri ili više puta godišnje, pa postoje godišnji, polugodišnji, kvartalni, tjedni ili čak dnevni obračuni. Uzmemo li da se obračun vrši n puta godišnje (u jednakim vremenskim intervalima), za svaki obračunski period kamatna stopa će iznositi $\frac{r}{n}$. Kako je u t godina nt perioda, svota S će se nakon t godina računati po formuli

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Uz pretpostavku da je $r = 1$, što bi značilo da kamatna stopa iznosi 100% (a sigurno nijedna banka nije baš toliko velikodušna), lagano napuštamo realni svijet bankarstva. S obzirom da smo matematičari u duši, to i neće biti tako teško, pa uz još dvije pretpostavke: $P = 1$ i $t = 1$, stižemo do neobične formule

$$S = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

U donjoj tablici dane su vrijednosti od S u ovisnosti o n:

n	$S = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2.25
3	2.37037 ...
4	2.44141 ...
5	2.48832 ...
10	2.59374 ...
50	2.69159 ...
100	2.70481 ...
1 000	2.71692 ...
10 000	2.71815 ...
100 000	2.71827 ...
1 000 000	2.71828 ...
10 000 000	2.71828 ...

Jasno je kako daljnje povećavanje broja n slabo utječe na iznos S.

To neobično ponašanje izraza $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ prvi je primijetio neki matematički "navudreni" bankar, negdje krajem 16. i početkom 17. stoljeća i tako rođendan broja, kasnije nazvanog e, ostaje nepoznat.

Zanimljivo je i to što se po prvi puta u povijesti matematike jedan broj definira, iako čisto eksperimentalno, kao granična vrijednost ili limes niza brojeva. Danas bismo tu definiciju pisali ovako:

$$e = \lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = 2.7182818285\ldots$$

Priča druga: John Napier i veliki izum

Rođen 1550. u Edinburghu u Škotskoj, taj vatreni protestant, teolog i pravnik bavio se matematikom kao hobijem. Poznavao je formule za pretvorbu umnoška u zbroj trigonometrijskih funkcija. Proučavao je svojstva geometrijskog niza:

$$1,\ q,\ q^2,\ q^3, \ldots, q^{n-1},\ q^n, \ldots$$

Odnos između članova geometrijskog niza i njihovih eksponenata već je bio poznat: množenjem dvaju članova niza, eksponenti se zbrajaju, a dijeljenjem oduzimaju. Osim toga, niz se može proširiti i na lijevu stranu, definiramo li

$$q^{-n} = \frac{1}{q^n} \quad \text{i} \quad q^0 = 1,$$

pa eksponenti čine aritmetički niz s diferencijom 1 i zapravo pokrivaju skup cijelih brojeva.

Tu se rodila briljantna ideja: kad bi se bilo koji broj mogao prikazati kao potencija nekog zadanog broja (baze), tada bi se umjesto množenja i dijeljenja brojeva izvodilo zbrajanje i oduzimanje eksponenata, potenciranje s n svelo bi se na množenje s n, a vađenje n-tog korijena na dijeljenje s n. No, kako to konkretno izvesti, i kako popuniti "rupe" između cijelih brojeva? Napier je smatrao da će pravilnim odabirom baze riješiti taj problem. Ali, koji broj izabrati za bazu? On ne smije biti ni prevelik ni premalen, kako bi potencije rasle ili padale razumnom brzinom.

Dvoumeći se godinama, Napier za bazu napokon izabire broj 0.9999999, odnosno $1 - 10^{-7}$. Tada započinje s mukotrpnim računanjem. Napier je čitavih 20 godina stvarao svoje prve logaritamske tablice. Eksponent svake potencije Napier naziva "umjetni broj", a kasnije se odlučuje za naziv **logaritam**. Dakle, ako je

$$N = 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^L,$$

onda je L Napierov logaritam od N.

Odmah uočavamo da je za $L = 0$, $N = 10^7$ i da za Napierove logaritme ne vrijede osnovna pravila računanja s logaritmima, npr. logaritam produkta nije jednak sumi logaritama i slično. Osim toga, $1 - 10^7 < 1$, pa Napierovi logaritmi padaju kad N raste.

Napier je svoj izum objavio 1614. godine i uporaba logaritama vrlo brzo se širi po Europi, stiže čak i do Kine.

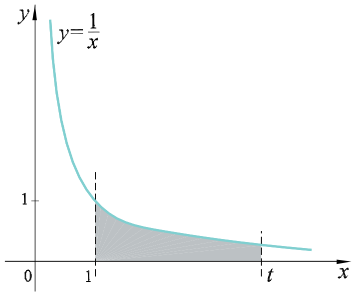

MIRIFICI
LOGARITHMO-
RVM CANONIS
DESCRIPTIO,
Ejusque usus, in utraque Trigonometria; vt etiam in omni Logistica Mathematica, amplissimi, facillimi, & expeditissimi explicatio.
ACCESSERVNT OPERA POSTHVMA;
Primò, Mirifici ipsius canonis constructio, & Logarithmorum ad naturales ipsorum numeros habitudines.
Secundò, Appendix de alia, eáque præstantiore Logarithmorum specie construenda.
Tertiò, Propositiones quædam eminentissimæ, ad Triangula sphærica mirâ facilitate resolvenda.
Autore ac Inventore IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, &c. Scoto.
EDINBVRGI,
EXCVDEBAT ANDREAS HART.
ANNO 1619.

Nova ideja oduševila je i Henrija Briggsa, londonskog profesora geometrije, koji ubrzo posjećuje Napiera i predlaže mu da za bazu uzme broj 10, tako da bude $\log 10 = 1 = 10^0$. Napier prihvaća sugestiju, ali računanje novih tablica prepušta mlađem kolegi. Briggs 1624. godine objavljuje prve logaritamske tablice s logaritmima svih cijelih brojeva između 1 i 20 000 te između 90 000 i 100 000 izračunatim na 14 decimala!

Ali, gdje je tu e? Odgovor na to pitanje znat će se tek 50-tak godina kasnije. U međuvremenu, pogledajmo još jedan problem koji nas vodi do neobičnog broja.

Priča treća: površina ispod hiperbole

Hiperbolu su, kao jedan od presjeka stošca ravninom, poznavali još stari Grci. Za razliku od kružnice ili elipse, ta krivulja nije zatvorena. Zato izračunati površinu ispod hiperbole $y = \dfrac{1}{x}$ nije ni malo ni lako. To neće biti jednostavno niti ako se ograničimo na dio ravnine koji je omeđen "pozitivnom" granom hiperbole, osi x i pravcima $x = 1$ i $x = t$, gdje je $t > 1$.



Uvertira u Grčkoj

Veliki grčki matematičar Arhimed ($\approx$287. – 212. p. K.) najprije je vrlo uspješno računao opseg i površinu kruga upisujući mu i opisujući niz pravilnih poligona. Zatim je pokušao pronaći i površinu ispod parabole, podijelivši ju na niz trokuta čije površine se smanjuju geometrijskom progresijom.

Ponavljajući postupak, došao je do niza trokuta čije su se površine skoro sasvim poklapale s površinom čitavog odsječka.

No, s hiperbolom, kao ni s elipsom, nije išlo.

Arhimedova metoda iscrpljivanja jako nas podsjeća na integralni račun. Ali, Grci su bili pravi praktičari, i zazirali su od svega što se nije moglo praktično izvesti ili pokazati. Izbjegavali su probleme u vezi s beskonačnosti i beskonačnim procesima.

1800 godina kasnije, u Francuskoj...

Pojam beskonačnosti zbunjivao je matematičare čitav niz stoljeća. Bila je to velika psihološka barijera i trebalo je proći čak 1800 godina da se ona prevlada. 1593. godine francuski matematičar F. Viète pronalazi formulu vezanu uz broj π:

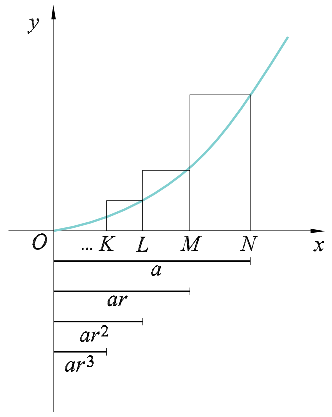
$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \ldots$$

Otkriće ovog beskonačnog produkta i mnogih drugih formula koje su slijedile probilo je tu barijeru. Prihvaćanjem beskonačnih procesa u matematici, a zatim i izumom analitičke geometrije početkom 17. stoljeća, problem površine ispod hiperbole dobiva novi smisao. Čak nekoliko slavnih matematičara pokušava riješiti taj problem.

Uz Renèa Descartesa koji je izumio analitičku geometriju, Blaisea Pascala i Johannesa Keplera, hiperbolu je proučavao i veliki Pierre Fermat. Iako se najviše bavio teorijom brojeva, pokušao je riješiti i problem površine ispod krivulja danih jednadžbom

$$y = x^n, \qquad n > 0,$$

(tzv. generalizirane parabole), aproksimirajući površinu ispod krivulje nizom pravokutnika čije baze čine padajući geometrijski niz.



Točkama K, L, M, N itd., interval $\langle 0, a\rangle$ na osi x podijeljen je na beskonačno mnogo podintervala čije duljine čine geometrijski niz, tj. vrijedi:

$$\begin{aligned} |ON| &= a, \\ |OM| &= ar, \\ |OL| &= ar^2, \ldots r < 1. \end{aligned}$$

Visine pravokutnika nad tim bazama su redom: a^n, $(ar)^n$, $(ar^2)^n$ itd. Uporabimo li formulu za sumu reda, dobijemo:

$$A_r = \frac{a^{n+1}(1-r)}{1-r^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{1+r+r^2+\ldots+r^n}.$$

Što je r bliži 1, pravokutnici će bolje aproksimirati površinu ispod krivulje. Zato računamo $\lim\limits_{r\to 1} A_r$:

$$\lim_{r\to 1} A_r = A = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Metoda vrlo podsjeća na Arhimedovu metodu, ali za razliku od Arhimeda, Fermat se usudio zbrajati beskonačno mnogo članova niza. Njegov rezultat prepoznajemo kao formulu $\int\limits_0^a x^n dx = a^{n+1}/(n+1)$, no treba imati na umu da je ona dobivena čak 30-tak godina prije otkrića integralnog računa.

Fermat je zatim uspio pokazati kako njegova formula vrijedi i za sasvim drugi tip krivulja – za generalizirane hiperbole:

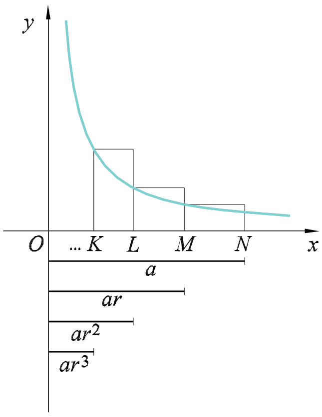
$$y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}.$$

Zapravo, za sve osim za krivulju po kojoj je čitava familija i dobila ime – za hiperbolu $y = \dfrac{1}{x}$! Baš šteta.

Ležeći u krevetu, kasno jednog jutra Renè Descartes je, promatrajući muhu kako se miče po stropu, došao na ideju da se svaka točka ravnine može opisati s dva broja, udaljenostima od dvaju fiksnih pravaca. Ta dva broja – koordinate točke – omogućila su matematičarima da umjesto geometrijskih objekata i krivulja promatraju njihove jednadžbe i geometrijske probleme svedu na algebarske.

. . . pa u Belgiji. . .

Jedan drugi matematičar, belgijski jezuit Gregoire Saint Vincent, primijetio je da su u slučaju hiperbole pravokutnici iz Fermatove metode svi jednakih površina. Zaista, širine pravokutnika, počevši od točke N, su $a - ar = a(1-r)$, $ar - ar^2 = ar(1-r)$, itd., a visine u točkama N, M, L... su a^{-1}, $(ar)^{-1}$, $(ar^2)^{-1}$... i sve površine iznose $1 - r$.



Gledamo li slijeva nadesno, dok udaljenost od ishodišta raste geometrijskom progresijom ($\dots ar^n$, ar^{n-1},...,ar^2, ar, a – vidi sliku), odgovarajuća površina ispod krivulje svakim se korakom povećava za $1-r$, odnosno raste aritmetičkom progresijom. To se ne mijenja ni kad pustimo da r teži ka 1.

Nameće se zaključak da je površina ispod hiperbole omeđena pravcima $x = 1$ i $x = t$ zapravo proporcionalna logaritmu od t. To će prvi puta eksplicite napisati jedan od Saint-Vincentovih učenika, Alfonso Anton de Sarasa:

$$A(t) = \log t.$$

... i to je to!

Tako je napokon, skoro 2 000 godina nakon što su Grci definirali problem, zadatak riješen! Do tada su logaritmi korišteni isključivo kao pomoć u računanju, a sada se po prvi puta koriste kao funkcija koja opisuje ovisnost jedne varijable o drugoj. Ostala je još samo jedna sitnica: konkretno računanje. Površina jest logaritamska funkcija udaljenosti od ishodišta, ali uz koju se bazu ona konkretno može izračunati? Kao što je za površinu kruga dugo bila poznata formula $P = kr^2$, ali k nije bilo koji broj, tako je i ovdje morala postojati baza koja bi numerički određivala površinu. Još uvijek je nedostajao postupak kojim bi se efikasno i lako rješavao taj problem.

Veliko finale

Otkriće diferencijalnog i integralnog računa jedan je od najvažnijih izuma u povijesti matematike. Do tog velikog otkrića došli su, neovisno, engleski fizičar i matematičar Isaac Newton (1642. – 1727.) i njemački matematičar, diplomat i pravnik Gottfried Wilhelm Leibniz (1646. – 1716.), jedan proučavajući problem brzine, drugi preko problema tangente.

Diferencijalni i integralni račun dat će nam odgovore na sva dosadašnja pitanja u vezi broja e. Vidjeli smo kako je Briggs poboljšao Napierove logaritamske tablice uzimajući za bazu broj 10. No, baza može biti bilo koji broj $b \neq 1$. Pa, neka je

$$y = b^x.$$

Pokušajmo pronaći derivaciju te funkcije. Računamo:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{b^{x+\Delta x}-b^x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{b^x(b^{\Delta x}-1)}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Zamijenimo li Δx s h, dobivamo:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{b^x(b^h-1)}{h}\\ &= b^x\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}.\end{aligned}$$

Limes gornjeg izraza postoji (postoji i dokaz...), označimo ga s k. To znači da je za $y = b^x$, $y' = kb^x$. Sad se nameće pitanje koji konkretno broj izabrati za bazu b tako da bude $k = 1$. To bi značilo da je derivacija funkcije jednaka njoj samoj. Iz

$$\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h} = 1$$

slijedi da je

$$b = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = 1,$$

a zamjenom varijable h s $\dfrac{1}{m}$ dobivamo da je

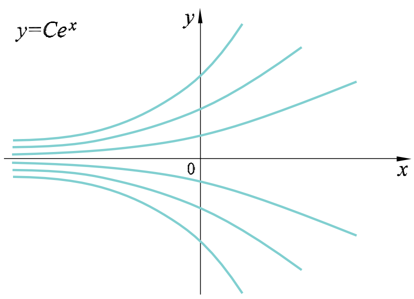
$$b = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

No, gornji limes već nam je poznat, to je upravo broj $e = 2.71828\ldots$.

Pokazalo se da je broj e jedini takav broj za koji je derivacija funkcije $y = e^x$ jednaka upravo e^x. Točnije, rješenje diferencijalne jednadžbe $\dfrac{dy}{dx} = y$ glasi

$$y = Ce^x, \qquad C \neq 0 \quad \text{je konstanta.}$$

Ova jednadžba predstavlja čitavu familiju eksponencijalnih krivulja, jedinstvenih po tome što su jednake svojoj derivaciji.



Inverz eksponencijalne funkcije $y = e^x$ logaritamska je funkcija s bazom e:

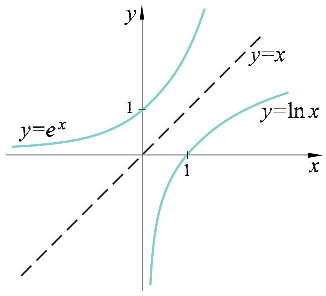
$$y = \ln x.$$

Izračunajmo sada njezinu derivaciju.

Kako je za $y = e^x$, $\dfrac{dy}{dx} = e^x = y$, odavde slijedi da je $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{y}$. Zamijenimo li varijable x i y, slijedi $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$, odnosno za $y = \ln x$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$. Drugim riječima, funkcija $\ln x$ je antiderivacija od $\dfrac{1}{x}$. A imajući na umu geometrijsko značenje integrala, jasno je da formula

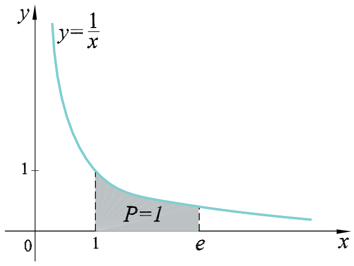
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

rješava naš, na početku postavljeni, problem površine ispod hiperbole. Konačno, uz bazu e, površina ispod hiperbole i numerički "štima".



Uočimo na kraju još nešto: površina ispod hiperbole omeđena s osi x i pravcima $x = 1$ i $x = e$ jednaka je 1. Dok je broj π površina jedinične kružnice, broj e ima linearnu dimenziju, on je vrijednost za koju je površina ispod hiperbole jednaka 1:

$$\text{Krug:} \quad P = \pi r^2 \Longrightarrow P = \pi \text{ za } r = 1;$$
$$\text{Hiperbola:} \quad P = \ln x \Longrightarrow P = 1 \text{ za } x = e.$$



Točka na e

Cijela priča o broju e ne može proći bez Leonharda Eulera. Za njega se kaže da je bio pravi matematički Mozart. Euler definira eksponencijalnu i logaritamsku funkciju sasvim neovisno:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \ln x = \lim_{n\to\infty} n\left(x^{\mathrm{tr}\,1n}-1\right),$$

i po prvi puta se u matematici središnja uloga daje upravo broju e i funkciji e^x.

Dugujemo mu većinu današnjih matematičkih simbola i oznaka (i, π, $f(x)$), a kumovao je i broju e. Oznaku e za broj $2.71828\ldots$ Euler koristi već 1727. (tada mu je bilo samo 20 godina), a definira ga kao broj čiji je hiperbolni logaritam jednak

1. Prvi puta oznaka je objavljena 1736. godine u njegovoj knjizi “Mechanica”. Zašto baš e? Zato jer je to prvo slovo riječi “eksponencijalna” ili prvo slovo njegova imena? Ili je jednostavno prvo za matematičke oznake neiskorišteno slovo abecede? Euler je izveo i formule za razvoj eksponencijalne funkcije u red:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x}{3!} + \dots$$

koji vrlo brzo konvergira i koristi se za računanje vrijednosti funkcije e^x i, konkretno, broja e:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots .$$

Euler se bavi i verižnim razlomcima, i otkriva i ovu zanimljivu formulu:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \dots}}}}}.$$

Koliki je virtuoz s formulama, pokazuju i sljedeći njegovi izrazi:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

iz kojih se dobiju poznate Eulerove formule za trigonometrijske funkcije. Osim toga, napišemo li prvi izraz za $x = \pi$, dolazimo do njegove najpoznatije formule

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

koja povezuje 5 najvažnijih matematičkih konstanti: aritmetičke 0 i 1, algebarsku i, geometrijsku π i konstantu iz analize e.

Ma, kakav je to broj?

Povijest broja e nije tako duga niti burna i oko njega ljudi nisu gubili glavu računajući što veći broj njegovih decimala. Da je broj e iracionalan dokazao je Euler 1737., a njegovu transcendentnost dokazuje Hermite 1873. godine (na više od 300 stranica!), a zanimljivo je da je tek nakon toga Lindemann pomoću Eulerove formule $e^{i\pi} + 1 = 0$ dokazao transcendentnost broja π.

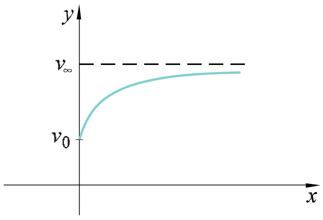
A jeste li znali da broj e i eksponencijalna funkcija e^x opisuju bezbroj prirodnih pojava?

Raspad radioaktivnih tvari, odnosno količina zračenja u svakom trenutku t proporcionalna je masi tvari: $\frac{dm}{dt} = -am$. Rješenje ove diferencijalne jednadžbe jednako je $m = m_0 e^{-at}$, m_0 je početna masa. Sada nam je jasno zašto nuklearni otpad može biti opasan: masa s vremenom teži k nuli, ali nikad ne postaje 0! Brzina raspada tvari ovisit će o broju a. Obično se mjeri vrijeme poluživota – vrijeme potrebno da se masa radioaktivne tvari smanji na polovicu. Na primjer, obični izotop uranija U^{238} ima poluživot 5 bilijuna godina, radij R^{226} 1600 godina, dok je Ra^{220} toliko nestabilan da mu vrijeme poluživota iznosi samo 23 milisekunde.

Sigurno ste koji puta željeli ohladiti čaj uronivši ga u vodu. A jeste li znali kako je poznati Newtonov zakon hlađenja eksponencijalna funkcija? I zbog nje, temperatura vašeg čaja nikad neće postati jednaka temperaturi vode. Stavimo li tijelo temperature T_0 u okolinu temperature T_1, ono se s vremenom hladi proporcionalno razlici $T - T_1$: $\frac{dT}{dt} = -a(T - T_1)$. Rješenje $T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-at}$ nam pokazuje kako se T s vremenom približava T_0, ali nikad ju ne postiže.

Kad zvuk putuje kroz zrak, njegova jačina I slabi kako udaljenost x od izvora raste. Taj zakon je rješenje diferencijalne jednadžbe $\frac{dI}{dx} = -aI$ i glasi: $I = I_0 e^{-ak}$. Rast populacije s vremenom također je eksponencijalna funkcija.

Zbog eksponencijalne funkcije padobranci smiju iskakati iz aviona bez straha da će nastradati ako odmah ne otvore padobrane – njihova brzina u trenutku pada:



$$v = \frac{g}{a}(1 - e^{-at}) + v_0 e^{-at},$$

nikada ne prelazi graničnu vrijednost i zato možemo reći da ne ovisi o početnoj brzini padobranca pri iskakanju iz aviona.

Od brojeva e najljepši je...

2 7 1 8 2...

I na kraju, kako memorirati što više decimalnih znamenki broja e? Ako vam nije dovoljan ovaj, pomalo nezgrapan podnaslov, možda će pomoći rečenica: *"To express e remember to memorize a sentence to simplify this"*. No, poštujući tradiciju, ni mi nećemo dizati buru oko broja e. Umjesto toga, evo jedne web adrese na kojoj možete pronaći nešto o e: `http://web.missouri.edu/~c639692/exp/`. Tu možete, između ostalog, pročitati top listu od $\ln(e^{10})$ razloga zašto je e bolji od π. Evo nekih:

- e je lakše napisati od π;
- ne treba poznavati grčki da bi koristili e.
- $\pi \approx 3.14$, a $e \approx 2.718281828459045$;
- znak za e možete pronaći na tastaturi, a za π ne;
- $\ln(\pi^1)$ je stvarno gadan broj, ali $\ln(e^1) = 1$;
- e se koristi u analizi, a π u dječjoj geometriji.

A sve o broju e, i još puno puno više, možete pročitati u knjizi Eli Maor: *"e: The Story of a Number"*.

Broj e na sto decimala:

$e = 2.71828\,18284\,59045\,23536$
$02874\,71352\,66249\,77572$
$47093\,69995\,95749\,66967$
$62772\,40766\,30353\,54759$
$45713\,82178\,52516\,64274\ldots$

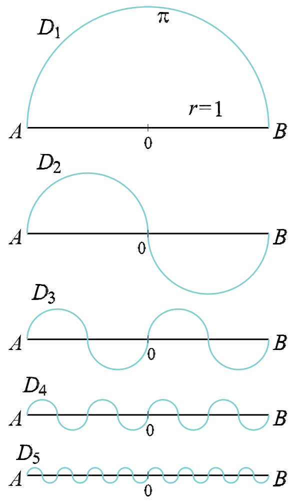
* * *

Nastavak sa str 161.

Za kraj, evo jednog malog paradoksa također vezanog uz broj π.

Tvrdnja: $\pi = 2$.

Nad dužinom $\overline{AB}$, $|AB| = 2$, opišimo polukružnicu. Dužina luka ove polukružnice, označena s D_1, jednaka je π (vidi sliku 5). Sad ćemo — kako je prikazano na slici — konstruirati polukružnice nad dužinama $\overline{AO}$ i $\overline{OB}$, $|AO| = |OB| = 1$. Njihova je duljina D_2 također jednaka π. Podijelimo zatim dužinu $\overline{AB}$ na četiri dijela. Opišemo li nad tim dijelovima polukružnice, njihova ukupna duljina je opet $D_3 = \pi$. Tu ćemo konstrukciju analogno primijeniti i na D_4, D_5 itd. Granična krivulja svih tih krivulja je dužina $\overline{AB}$, tj. promjer od D_1, čija je duljina 2. Iz toga slijedi $\pi = 2$.



Sl. 5.

"Kako je to moguće?" zapitat će se ljudi s neiskusnim okom, dok će matematičari zadovoljno trljati ruke jer su smislili još jedan problem na kojeg ostatak svijeta nema odgovor.