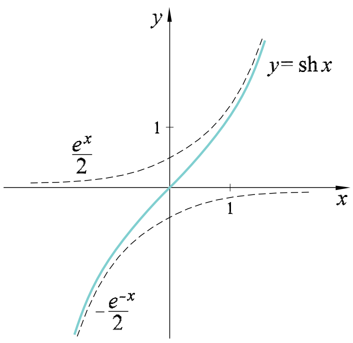
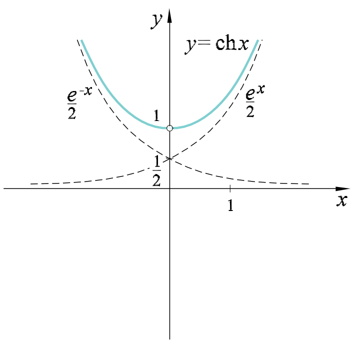
Spektakularna formula

Funkcije definirane formulama $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ i $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ zovemo **hiperboličkim sinusom**, odnosno **hiperboličkim kosinusom**.

Na donjim su slikama prikazani grafovi ovih dviju funkcija.





Funkcija $f(x) = \operatorname{sh} x$ rastuća je funkcija, ona je neparna i ima nultočku $x = 0$. Za $x > 0$ funkcija prima pozitivne, a za $x < 0$ negativne vrijednosti.

Funkcija $f(x) = \operatorname{ch} x$ je parna funkcija, najmanju vrijednost $f(x) = 1$ postiže za $x = 0$. Za sve $x \in \mathbf{R}$ funkcija $f(x) = \operatorname{ch} x$ prima pozitivne vrijednosti.

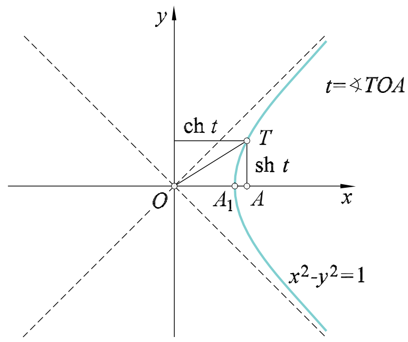
Primijetimo kako su za dovoljno velike x vrijednosti obiju ovih funkcija približno jednake vrijednostima funkcije $f(x) = \dfrac{1}{2}e^x$.

Jednostavno je provjeriti da vrijedi jednakost:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

a ona je ujedno odgovor na pitanje odakle imena ovim funkcijama. Naime, jednadžba $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ je jednadžba trigonometrijske kružnice, pa se nerijetko trigonomtrijske funcije zovu ciklometrijskim.

Mogli bismo onda reći da je jednadžba $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ jednadžba trigonometrijske hiperbole.



Hiperboličke funkcije imaju niz svojstava koja su analogna svojstvima trigonometrijskih funkcija, pa tako primjerice vrijede sljedeći identiteti:

$$\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}\,x\mathrm{ch}y + \mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}\,y;$$
$$\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}x\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y;$$
$$\mathrm{ch}2x = \mathrm{sh}^2\,x \cdot \mathrm{ch}^2 y.$$

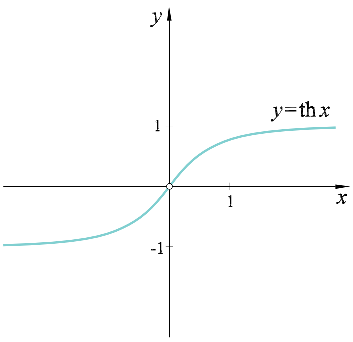
Hiperboličke funkcije imaju primjene u tehnici, a napomenimo kako jednadžba poznate krivulje **lančanice**, o kojoj je bilo riječi u 6. broju MŠ-a glasi

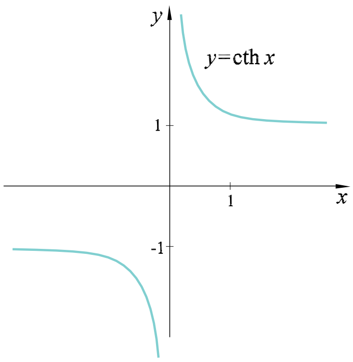
$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Napomenimo kako se uz funkcije $\mathrm{sh}\,x$ i $\mathrm{ch}x$ definiraju i funkcije $\mathrm{th}\,x$ i $\mathrm{cth}\,x$:

$$\mathrm{th}\,x = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$
$$\mathrm{cth}\,x = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}\,x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Evo grafova i ovih dviju funkcija:





Eksponencijalna funkcija kompleksne varijable $f(z) = e^z$ definirana je na sljedeći način:

$$e^z = 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}.$$

Ako je $z = ix$, onda je

$$e^{ix} = \left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$$
$$+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right).$$

U zagradama su raspisi u redove funkcija $\cos x$ i $\sin x$, pa je odatle

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

i to je vrlo čuvena **Eulerova formula**.

Iz te formule slijedi $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$, a onda se jednostavno dobije

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}; \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Preko ove dvije jednakosti sada se definiraju **kompleksne trigonometrijske funkcije**:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}; \qquad \sin x = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Uvrstimo li $z = ix$, proisteći će veza trigonometrijskih i hiperboličkih funkcija:

$$\mathrm{ch}x = \cos ix; \qquad \mathrm{sh}\,x = \frac{1}{i}\sin ix.$$

Vratimo se na trenutak Eulerovoj formuli.

Ona vrijedi za sve kompleksne brojeve, pa onda dakako i za sve realne. Uvrstimo li u nju $x = \pi$, dobit ćemo $e^{i\pi} = -1$, odnosno

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Formula je spektakularna, u njoj je povezano pet najpoznatijih brojeva koji se javljaju u matematici: 0, 1, e, π i i.