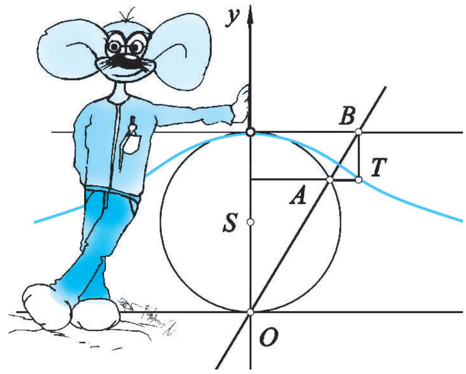
Neki skupovi točaka u ravnini i njihove jednadžbe



Petar Vranjković, Zadar

Francuski matematičar i filozof René Descartes (1596. – 1650.) 1637. godine objavio je svoje epohalno djelo o analitičkoj geometriji (naziv je djela "Rasprava o metodi"). Što je tu, zapravo, Descartes uradio? Misterioznu Euklidovu "točku" potisnuo je s matematičkog neba uređenim parom realnih brojeva. Dakle, jednostavno rečeno, on je geometriju "prebacio" u algebru. Na taj način geometrija se proučava novom metodom, tzv. metodom koordinata, odnosno metodom koordinatnog sustava. Descartes je koordinatnim sustavom povezao geometriju i algebru (tako smo dobili analitičku geometriju!). Točnije rečeno, tom se metodom geometrijski problem svodi na algebarski, a zatim se njegovo algebarsko rješenje interpretira geometrijski.

No, to je bio samo početak onoga što je slijedilo iz njegove genijalne inspiracije. Što je Descartes time omogućio, nije možda ni sam bio svjestan!

Pojam skupa točaka suvremeni je naziv kojemu prethodi pojam geometrijskog mjesta točaka. Inače, ovaj pojam se pojavljuje u Platonovoj Akademiji, i tu se razvija metoda geometrijskog mjesta točaka.

Središnje mjesto čitave analitičke geometrije predstavlja veza između skupa točaka i njemu pridružene jednadžbe.

Mi ćemo se ograničiti na ravninu, i na činjenicu kako se skup točaka, koji se najčešće izriče verbalno pomoću geometrijskih uvjeta, prevodi u jednadžbu. Ovo je, inače, tipična situacija kada geometrijski problem svodimo na algebarski jezik.

Istaknimo odmah da u analitičkoj geometriji ravnine imamo samo 2 osnovna problema:

1) Ako je zadana jednadžba, onda treba nacrtati njen graf, tj. predočiti je geometrijski kao skup točaka u ravnini.

2) Ako je zadan skup točaka u ravnini, definiran nekim geometrijskim uvjetima, onda treba odrediti jednadžbu toga skupa točaka.

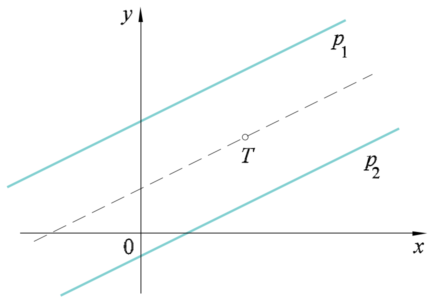
Jedan od načina rješavanja zadataka vezanih za drugi problem je sljedeći. Važno je naslutiti kakav je "lik" traženi skup točaka u ravnini. To se postiže tako da se najprije konstruira što veći broj točaka traženog skupa točaka, pa ih zatim spojimo. Crtež valja uraditi što je moguće preciznije, jer nas inače može odvesti na krivi put. Zatim se nastoji utvrditi neko svojstvo traženog skupa točaka, koristeći zadane podatke. I na kraju se izvodi dokaz, odnosno, postavlja se jednadžba traženog skupa točaka.

Pokažimo to na primjerima.

Primjer 1. Odredimo skup svih točaka u ravnini koje su jednako udaljene od dvaju usporednih pravaca.

Rješenje. Ako nacrtamo usporedne pravce p_1 i p_2, onda lako zaključujemo da sve točke, koje su jednako udaljene od p_1 i p_2, leže na jednom pravcu koji je s njima usporedan.

Evo i analitičkog izvoda.



Neka su zadani usporedni pravci

$$p_1 \dots A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$p_2 \dots A_1x + B_1y + C_2 = 0, \ C_1 \neq C_2,$$

a $T(x, y)$ neka je točka na jednakoj udaljenosti od njih.

Tada mora vrijediti

$$|Tp_1| = |Tp_2|,$$

tj.

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_1x + B_1y + C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Oslobodivši se razlomaka, a zatim modula, u jednom slučaju dobivamo

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = C_2 - C_1,$$

a to je prazan skup, jer je $C_1 \neq C_2$.

U drugom slučaju imamo

$$2A_1x + 2B_1y + C_1 + C_2 = 0,$$

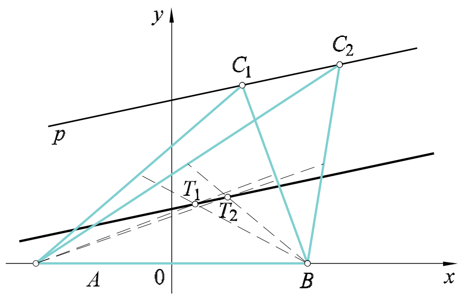
tj.

$$A_1x + B_1y + \frac{C_1 + C_2}{2} = 0,$$

a to je jednadžba pravca koji je usporedan sa zadanim pravcima p_1 i p_2. Taj je pravac, zapravo, os simetrije skupa koji je određen usporednim pravcima p_1 i p_2.

Primjer 2. Zadani su vrhovi trokuta A i B, a vrh C se "giba" po pravcu p. Odredimo skup točaka u ravnini koji čine težišta svih tako dobivenih trokuta ABC.

Rješenje. Nacrtamo li točke A i B i pravac p koji ne prolazi kroz A i B, a zatim uzmemo nekoliko točaka $C \in p$, tada ćemo uočiti da težišta dobivenih trokuta ABC leže na jednom pravcu, usporednim s pravcem p.



Evo i dokaza.

Odaberimo točke $A(-c, 0), B(c, 0), C(x_3, y_3)$ i pravac $p \dots y = ax + b$. Neka je $T(x, y)$ težište trokuta ABC. Prema formulama za koordinate težišta trokuta

$$x_T = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_T = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

imamo:

$$x = \frac{-c + c + x_3}{3} \quad y = \frac{0 + 0 + y_3}{3},$$

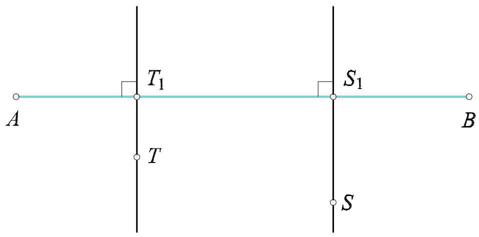
tj. $x = \frac{1}{3}x_3$, $y = \frac{1}{3}y_3$. Ali, kako $C \in p$, to je $C(x_3, ax_3 + b)$, pa je $y = \frac{1}{3}(ax_3 + b) = \frac{x_3}{3}a + \frac{b}{3} = ax + \frac{b}{3}$, a ovo je doista jednadžba pravca. Taj je pravac usporedan sa zadanim pravcem p.

Primjer 3. Ako su A i B dvije točke ravnine, onda je skup svih točaka ravnine za koje vrijedi $|AT|^2 - |BT|^2 = k^2$, $k \in \mathbf{R}$, pravac okomit na AB. Dokažimo.

Dokaz. Neka su A, B dvije točke ravnine, $|AB| = d$, i neka je $k \in \mathbf{R}$. Pokažimo da je skup točaka T u ravnini za koje vrijedi $|AT|^2 - |BT|^2 = k^2$ pravac.

Neka je $T_1 \in \overline{AB}$ tako da vrijedi $|AT_1|^2 - |BT_1|^2 = k^2$. Ali, $|AT_1| + |BT_1| = |AB| = d$, pa je $|T_1B| = d - |AT_1|$. Iz $|AT_1|^2 - (d - |AT_1|)^2 = k^2$ izlazi $|AT_1| = \dfrac{d^2 + k^2}{2d}$. To znači da na dužini $\overline{AB}$ postoji samo jedna točka T_1 koja zadovoljava (1).

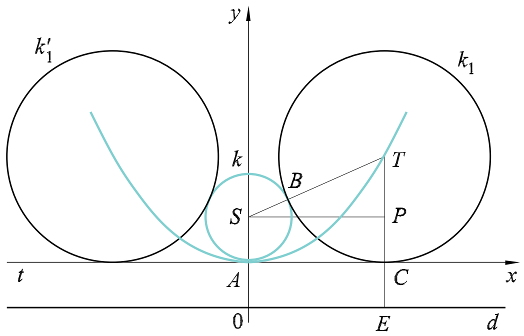
Neka je dalje T neka točka na okomici na pravac AB koja ide točkom T_1.



Pokažimo da za točku T vrijedi (1). $|AT|^2 - |TB|^2 = |AT_1|^2 + |T_1T|^2 - (|T_1T|^2 + |T_1B|^2) = |AT_1|^2 - |T_1B|^2 = k^2$. To znači da svaka točka pravca TT_1 zadovoljava (1). Još nam je ostalo pokazati da nema drugih točaka u ravnini koje bi zadovoljile uvjet (1). Neka $S \notin T_1T$ tako da je $|AS|^2 - |SB|^2 = k^2$ i pokažimo da to nije moguće. Neka je dalje točka S_1 nožište okomice iz točke S na pravac AB. Onda vrijedi $|AS|^2 - |SB|^2 = |AS_1|^2 + |S_1S|^2 - (|S_1S|^2 + |S_1B|^2) = |AS_1|^2 - |S_1B|^2 \neq k^2$, a to znači da točka S ne zadovoljava (1). Prema tome, točke pravca TT_1 jedine su koje zadovoljavaju uvjet (1).

Primjer 4. Zadana je kružnica k sa svojom tangentom t. Nađimo skup točaka sastavljen od središta kružnica koje dodiruju zadanu kružnicu k i tangentu t.

Rješenje.



Najprije možemo zaključiti da je pravac AS os simetrije kružnice i njene tangente. Uočimo dalje da svaka kružnica koja prolazi točkom A, a središte joj je na pravcu AS zadovoljava zadani uvjet. Prema tome je pravac AS traženi skup točaka.

Da li je to jedini skup točaka koji zadovoljava uvjet?

Postoji kružnica k_1 koja dira kružnicu k i tangentu t. Neka je T središte te kružnice. Ako spojimo S i T onda vrijedi $|TB| = |TC|$. Točkom D povucimo usporedno s tangentom t pravac d tako da je $|AD| = |AS|$. Onda vrijedi:

$$\begin{aligned} |TS| &= |TB| + |BS| = |TC| + |AS| \\ &= |TC| + |AD| = |TC| + |CE| = |TE|. \end{aligned}$$

Svakoj kružnici k_i, $i = 1, 2, \ldots$, koja zadovoljava zadani uvjet, s jedne strane osi simetrije pridružena je odgovarajuća kružnica k_i', $i = 1, 2, \ldots$ s druge strane te osi. Kako za središte svake takve kružnice vrijedi da je ono jednako udaljeno od čvrste točke S i pravca d, nije teško zaključiti da su sva ta središta na paraboli kojoj je žarište u točki A, a ravnalica je pravac d.

Evo sada i izvoda.

Neka je koordinatni sustav kao na slici i neka je $|SA| = r$, $|TB| = R$, $T(x, y)$. Onda iz pravokutnog trokuta PST imamo:

$$\begin{aligned}(r+R)^2 &= x^2 + (y-r)^2\\ 2ry + y^2 &= x^2 + y^2 - 2ry\\ x^2 &= 4ry.\end{aligned}$$

Ovo je jednadžba parabole kojoj je $2p = 4r$, odnosno $p = 2r$, pa je žarište $S(r, 0)$, a jednadžba ravnalice glasi $y = -r$.

Primjer 5. Zadane su dvije točke A i B tako da je $|AB| = 2a$, $a \in \mathbf{R}^+$. Odredimo jednadžbu skupa točaka T za koji vrijedi $|TA| = k|TB|$, $k \in \mathbf{R}^+$.

Rješenje. Neka je $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ i $T(x, y)$. Onda vrijedi

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = k\sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$

Nakon kvadriranja i sređivanja dobijemo:

$$\begin{aligned}x^2(1-k^2) + 2a(1+k^2)x + y^2(1-k^2)&\\ = a^2(k^2-1)&.\end{aligned}$$

1) Ako je $k = 1$, onda imamo $4ax = 0$, odnosno $x = 0$, a to je jednadžba y-osi. Za zadanu dužinu $\overline{AB}$ to je simetrala te dužine.

2) Ako je $k \neq 1$, onda dobivenu jednadžbu možemo pisati:

$$\left(x + \frac{1+k^2}{1-k^2}a\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2k^2}{(1-k^2)^2}.$$

To je jednadžba kružnice kojoj je

$$S\left(-\frac{1+k^2}{1-k^2}a, 0\right), \qquad r = \frac{2ak}{1-k^2}.$$

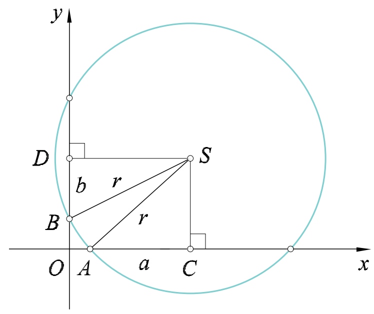
Primjer 6. Odredimo skup točaka ravnine sastavljen od središta kružnica kojima odsječak na x osi iznosi $2a$, a odsječak na y osi iznosi $2b$.

Rješenje. Neka je $S(x, y)$ bilo koja točka traženog skupa točaka. Iz trokuta ACS, odnosno BDS imamo:

$$\begin{aligned}a^2 + y^2 &= r^2\\ b^2 + x^2 &= r^2,\end{aligned}$$

a odavde dobijemo

$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2. \qquad (1)$$



1) Ako je $a \neq b$, onda (1) predstavlja hiperbolu.

2) Ako je $a = b$, onda iz (1) izlazi $(x-y)(x+y) = 0$, tj. $x - y = 0$ ili $x + y = 0$, a to je unija dvaju pravaca.

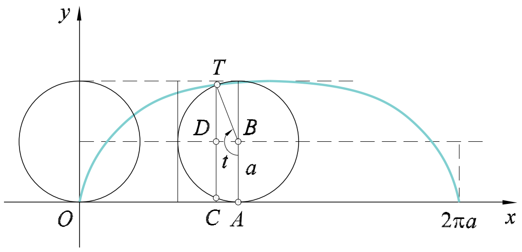
Poznavanje veze između nezavisne i zavisne varijable x i y omogućava nam lakše razumjeti da se svaka od varijabli x i y može definirati i kao funkcija neke nove treće varijable t, koju obično nazivamo parametrom. U tom ćemo slučaju imati dvije parametarske jednadžbe $x = f(t)$, $y = g(t)$, gdje su $f(t)$ i $g(t)$ neprekinute funkcije na nekom intervalu I. Preciznije rečeno, parametarsku jednadžbu krivulje Y u ravnini definiramo kao funkciju sa $\mathbf{R}$ u $\mathbf{R}^2$, odnosno funkciju $t \mapsto (f(t), g(t))$, s nekog intervala I na krivulju Y. Parametar t je moguće eliminirati kada bar jedna od funkcija $f(t)$, $g(t)$ ima inverznu funkciju. Ako, dakle, možemo eliminirati parametar t iz istih jednadžbi, dobit ćemo jednu ekvivalentnu jednadžbu izraženu u pravokutnim koordinatama.

Ali, zašto parametarske jednadžbe?!

Uvođenje parametarskih jednadžbi može imati više prednosti, npr. kod crtanja krivulja u računalnim programima. No, glavni razlog korištenja parametarskih jednadžbi leži u činjenici da su za neke skupove točaka parametarske jednadžbe jednostavnije od onih u pravokutnim koordinatama.

Primjer 7. Krug polumjera r se kotrlja (bez klizanja) po pravcu p. Odredimo skup točaka u ravnini koji opisuje jedna točka na obodu kruga.

Rješenje. Neka se x os podudara s pravcem p, a početni položaj točke $T(x, y)$ s ishodištem O.



Uzmimo za parametar $\sphericalangle ABT = t$. Izračunajmo duljinu luka $\overset{\frown}{AT}$. Prema uvjetu iz zadatka imamo $|OA| = |\overset{\frown}{AT}| = r \cdot t$. Sada je

$$\begin{aligned} x &= |OC| = |OA| - |CA| \\ &= rt - r\sin(\pi - t) = r(t - \sin t), \\ y &= |CT| = |AB| + |DT| \\ &= r + r\cos(\pi - t) = r(1 - \cos t). \end{aligned}$$

Tako smo dobili parametarske jednadžbe traženog skupa točaka

$$\begin{aligned} x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t). \end{aligned}$$

Ovaj skup točaka naziva se cikloida.

Primjer 8. Nađimo jednadžbu skupa točaka T koji je definiran ovako: Kroz ishodište prolazi pravac koji kružnicu $x^2 + y^2 - ay = 0$ siječe u točki A, a pravac $y = a$ u točki B. Točka T je presjek paralele s osi x koja ide točkom A i paralele s osi y koja ide točkom B.

Rješenje. Ako riješimo sustav

$$\begin{aligned} y &= kx \\ y &= a, \end{aligned}$$

dobijemo apscisu točke B, koja glasi

$$x = \frac{a}{k}. \tag{1}$$

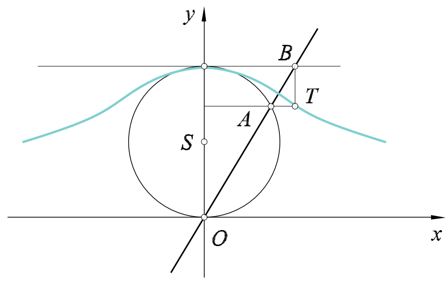
Rješenjem, pak, sustava

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - ay &= 0 \\ y &= kx, \end{aligned}$$

dobit ćemo ordinatu točke A, koja glasi

$$y = \frac{ak^2}{1 + k^2}. \tag{2}$$

No, ako bolje pogledamo, jasno je da (1) i (2) predstavljaju vrijednosti koordinata točke T. Zapravo, (1) i (2) su parametarske jednadžbe traženoga skupa točaka.



Eliminirajmo parametar k!

Iz (1) izlazi $k = \dfrac{a}{x}$, pa ga uvrstimo u (2). Nakon sređivanja dobijemo

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}.$$

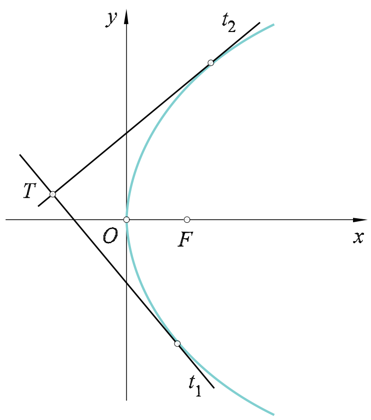
Ova se krivulja naziva krivulja M. Agnesi.

Kako parametar možemo izabrati na više načina, može se očekivati da ćemo imati više raznih parametarskih jednadžbi koje predstavljaju zadani skup točaka. Međutim, u nekim slučajevima skup parametarskih jednadžbi predstavljat će samo jedan podskup skupa točaka, i svakako će trebati više takvih skupova parametarskih jednadžbi da se zadani skup točaka potpuno predstavi. Tako npr. jednadžbe $x = 2\sin^2 t$, $y = \cos t$ predstavljaju samo dio parabole (jer je $x \in [0, 2]$, a $y \in [-1, 1]$) čija jednadžba u pravokutnim koordinatama glasi $y^2 = -\dfrac{x}{2} + 1$.

Valja, dakako, istaći da su predstave o familijama i parametrima skupa točaka pojmovi koji su zapravo poopćenja, i značajni su iz više razloga. Oni mogu povećati učenikov interes za sam predmet, produbiti njegovo razumijevanje i proširiti njegov matematički vidokrug, a odigrat će, dakako, i značajnu ulogu kasnije. Zato ti pojmovi moraju biti solidno i kvalitetno postavljeni i utvrđeni, pogotovo onda kada je to učenicima prvi susret s tim problemima. Da bi se uspješno objasnio pristup ovim pojmovima i problemima u svezi s njima, pozornost valja usmjeriti na skiciranje problema, cilja i plana izvođenja prije samog prijelaza na detalje. Time bi bio definiran smjer izvođenja kao i njegovo opravdanje, a možda bi i sam put učenicima bio jasniji.

Primjer 9. Skup svih sjecišta parova okomitih tangenata povučenih na parabolu $y^2 = 2px$ određuju pravac. Dokažimo.

Dokaz.



Neka je $T(x, y)$ točka u kojoj se sijeku okomite tangente t_1 i t_2 parabole $y^2 = 2px$. Onda su jednadžbe tih tangenata

$$y = k_1x + l_1, \tag{1}$$

$$y = -\frac{1}{k_1}x + l_2. \tag{2}$$

Nađimo sjecište tih tangenata. Iz (1) i (2) izlazi

$$x = \frac{k_1l_2 - k_1l_1}{k_1^2 + 1}. \tag{3}$$

Tangente (1) i (2) zadovoljavaju uvjet dodira, pa imamo

$$2k_1l_1 = p$$

$$2\left(-\frac{1}{k_1}\right)l_2 = p,$$

a odatle dobivamo

$$k_1l_1 = \frac{p}{2}, \tag{4}$$

$$l_2 = -\frac{1}{2}pk_1. \tag{5}$$

Iz (3), prema (4) i (5) imamo

$$x = -\frac{p}{2} \tag{6}$$

i za zadanu parabolu to je fiksan broj, a ordinata y će se mijenjati jer ovisi o k i l. Prema tome (6) je doista pravac i to ravnalica parabole.

* * *

U analitičkoj geometriji može se pojaviti više teškoća, a osobito valja istaći onu koja se odnosi na prevođenje zadanih geometrijskih uvjeta u algebarske formule, i njihovu interpretiranju. Poznato je, naime, da je jedan od glavnih problema zaključiti nešto o geometrijskim značajkama promatranog skupa točaka i to samo na temelju njegove jednadžbe. Stoga je jasno od kolike je važnosti nastavnikova sposobnost u dobrom izvođenju formula, objašnjavanju njihova značenja i njihovu korištenju.

A rečeno je da se metoda Analitičke geometrije stvarno shvaća onda i samo onda kada se istinski spozna međusobna veza između skupa točaka i njegove jednadžbe.