Iz razreda

Zadaci, zadaci, zadaci... a teorija?

Šime Šuljić i Vesna Vujasin-Ilić, Pazin

Škola je u našem društvu podvrgnuta stalnoj i sve naglašenijoj kritici javnosti da samo niže prevelik broj pojmova i činjenica, a od učenika zahtijeva golu reprodukciju znanja, često bez razumijevanja. Da kritike nisu neutemeljene, daje naslutiti i zgodna učenička dosjetka: "Učim danas, odgovaram sutra i zaboravljam prekosutra". Kako u tom kritičkom pogledu stoji matematika? Nastavnici će odmah odgovoriti da upravo mi ne tražimo "bubetanje" činjenica, već razumijevanje, primjenu i rješavanje problema. I učenici će se složiti da učenje napamet nije ono što ih opterećuje u matematici. Je li onda prenaglašena neka druga sastavnica procesa učenja, odnosno je li poneka zanemarena?

Da bismo odgovorili na ovo pitanje, možda bi bilo najbolje da kritički razmotrimo uobičajenu nastavnu praksu sa stanovišta postizanja obrazovnih ciljeva nastave matematike. Postoje razni teorijski pristupi ciljevima obrazovanja. Možemo se osloniti na tzv. taksonomiju kognitivnih ciljeva američkog psihologa B. S. Blooma, koju je usvojilo i američko psihologijsko društvo. Neki didaktičari (F. Zech) nisu smatrali ovakvu podjelu sasvim zadovoljavajućom za matematiku pa su modificirali Bloomovu taksonomiju. Namjera ovog članka nije ulaženje u teorijsku raspravu o ciljevima nastave matematike, već osvješćivanje praktičnog provjeravanja znanja. U tom smislu može nam poslužiti pojednostavnjena i donekle prilagođena Bloomova shema. Bloom navodi šest hijerarhijskih razina učenja, počevši od najjednostavnije:

1. **Činjenično znanje**, pod čime se razumijeva sjećanje na prije naučene sadržaje širokog raspona, od usvajanja osnovnih pojmova, preko činjenica, do poznavanja raznih postupaka. Za matematiku je još važno poznavanje simbola, stručnih izraza, formula, uobičajenih konvencija, definicija i teorema.

2. **Razumijevanje** je kognitivna spoznajna kategorija pravilnog primanja informacija (pojmova, tvrdnji i postupaka) sa sposobnošću interpretacije ili uopćavanja.
3. **Primjena** znači sposobnost uporabe naučenih činjenica i postupaka. Kada je o matematici riječ, ovdje bismo mogli podrazumijevati vladanje računskim operacijama, algebarskim i geometrijskim postupcima, poštivanje logičkih pravila i postupaka, korištenje matematičkih simbola i formula.
4. **Analiza** je sposobnost da se usvojeni sadržaji rastave na dijelove i uoči njihova organizacijska struktura. Analiza dolazi do izražaja u primjeni na jednostavne i rutinske matematičke zadatke, kod kojih obično postavljamo pitanje što je zadano, a što se traži.
5. **Sinteza** je viša spoznajna kategorija koja omogućuje da se dijelovi znanja preslože u jednu novu cjelinu. Za ovaj iskorak nužna je kreativnost.
6. **Procjena** bi značila sposobnost misaonog vrednovanja sadržaja i metoda.

Ovaj opći model kategoriziranja razina znanja odgovara prirodi našeg nastavnog predmeta. Dvojba može nastati glede redoslijeda prvih dviju razina znanja. Možda smo više skloni shvaćanju da u osnovi svega i prije bilo kojeg početnog koraka u matematici mora stajati razumijevanje. Bez ulaženja u taj problem ilustrirajmo ovako razrađenu shemu na konkretnom primjeru. Jedan od ključnih sadržaja srednjoškolske nastave matematike je izgled grafa kvadratne funkcije i njegova ovisnost o vodećem koeficijentu i predznaku diskriminante.

1. Osnovne činjenice koje bi učenik trebao usvojiti jesu da je graf kvadratne funkcije parabola, s otvorom prema gore ako je vodeći koeficijent a pozitivan, odnosno otvorom prema dolje ako je a negativan broj. Nadalje, potrebno je točno znati kako predznak diskriminante utječe na vrstu nultočaka.
2. Ako učenik razumije te osnovne činjenice, tada može skicirati graf funkcije za zadanu vrijednosti vodećeg koeficijenta i za predznak diskriminante. I obrnuto, tada može interpretirati nacrtani graf.
3. Primjena naučenog očituje se u rutinskom grafičkom postupku rješavanja kvadratne nejednadžbe, na primjer $x^2 - 4 < 0$.
4. Analiza je potrebna da se riješi zadatak tipa: "Za koje će vrijednosti realnog parametra p funkcija $f(x) = px^2 + (p-1)x + 1$ primati pozitivne vrijednosti za svaki x?". Ovdje se traži odgovarajuća raščlamba usvojenog znanja. Početno pitanje može se povezati s izgledom grafa funkcije i od šest mogućih slučajeva izabrati jedini moguć. Učenik potom treba povezati izabrani slučaj s odgovarajućim vrijednostima vodećeg koeficijenta i predznakom diskriminante.
5. Za rješavanje primjera iz prethodne točke značajno olakšanje može pružiti dobro znana tablica položaja parabole u odnosu na os apscisa. Nju nalazimo u svim priručnim podsjetnicima iz matematike. No, učenik sintezom može i sam doći do te sheme. On zna kako izgleda graf kvadratne funkcije. Razlikuje slučajeve $a > 0$ i $a < 0$. Zna da o diskriminanti ovisi siječe li parabola, dira li ili uopće nema zajedničkih točaka s osi apscisa u koordinatnom sustavu. Ta fragmentarna znanja može povezati u jednu cjelinu i stvoriti vrlo praktičnu shemu.
6. Sposobnost procjene na ovom području može se očitovati, recimo, u usporedbi i vrednovanju grafičke metode rješavanja nejednadžbi u odnosu na logičku ili tabličnu metodu.

U nastavi matematike trebalo bi težiti dostizanju što viših kognitivnih razina. To, naravno, ovisi o vrsti i stupnju škole. Vjerujemo da se u našoj nastavnoj praksi dolazi barem do analize s jednostavnom primjenom, a nerijetko se nastoji ponuditi i problemske zadatke koji zahtijevaju sintetičko mišljenje. Možda je najčešća boljka nastave matematike u učionicama forsiranje primjene naučenog na računskim i algebarskim postupcima. I u vježbenicama nalazimo na pretjerano nizanje zadataka tipa *Izračunaj. . .* , *Koliko je. . .* . To nikako ne znači da se u nastavi matematike poznavanju i razumijevanju pojmova i činjenica ne pridaje dovoljna važnost. Dakako da se i nastavnici i udžbenici trude dobro uvesti i definirati osnovne pojmove, dokazati i ilustrirati tvrdnje. Problem je u tome što se poznavanje i razumijevanje osnovnih pojmova, simbola i činjenica od učenika traži samo u zadacima u kojima se ujedno traži analiza ili sinteza, pa nikada ne vrednujemo usvojenost tih nižih kategorija znanja samih po sebi. Ilustrirajmo to na primjeru zadatka o prirodi rješenja kvadratne jednadžbe: "*Za koje vrijednosti realnog parametra* m *jednadžba* $mx^2 + 2(m+1)x + m + 3 = 0$ *ima realna rješenja?*" U trenutku ponavljanja ovakav je zadatak nužan da bismo kod učenika provjerili usvojenost pojma diskriminante i njezinog utjecaja na prirodu rješenja jednadžbe. Ukoliko učenik nije usvojio sam pojam diskriminante i/ ili ne zna ništa o utjecaju predznaka diskriminante na rješenja jednadžbe, situacija se "spašava" ocjenjivanjem algebarskog postupka rješavanja linearne nejednadžbe koja slijedi. Drugim riječima, ispitujemo gradivo drugog razreda, a ocjenjujemo gradivo prvog razreda. Isto se tako može postaviti pitanje zakidamo li mi to u ocjeni učenika koji izvanredno vlada novousvojenim sadržajima, a zapinje tek na algebarskim postupcima, kada nam je bio cilj provjeriti usvojenost novih sadržaja. Kod učenika kojima matematika ide teže ima smisla posebno provjeravati činjenično znanje i razumijevanje, da bi se preciznije odredilo i otklonilo probleme u učenju. Sustavnim provođenjem takvih "teorijskih ispita" kod svih učenika:

- razvija se navika pravilnog logičkog izražavanja;
- naglašava se važnost matematičkih simbola;
- razvija se matematički rječnik;
- naglašavaju se važnija znanja koja trebaju ostati u trajnijem sjećanju;
- potiče se redovan rad;
- potiče se korištenje udžbenika;
- bolje se priprema za maturu i studij.

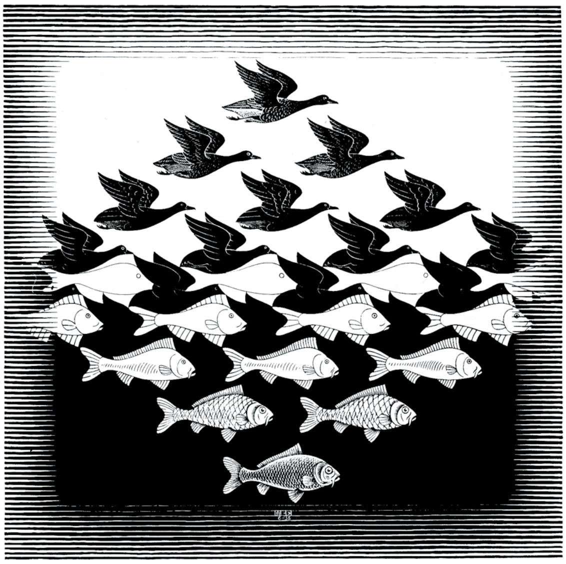
Mišljenja smo da bi se u srednjoj školi gotovo svaku nastavnu cjelinu trebalo provjeriti kroz kratak pismeni ispit znanja, bez zadataka koji traže neki veći računski, algebarski ili geometrijski postupak rješavanja. Takvi se pismeni ispiti mogu tempirati prije programom planiranih ispita znanja. Time i učenik i nastavnik dobivaju informaciju na čemu još dodatno treba raditi. Sama pitanja u takvim ispitima moraju biti nedvojbena i egzaktna, ali zato mogu biti vrlo različitih oblika:

- zaokruži točan odgovor;
- nadopuni rečenicu;
- napiši definiciju, tvrdnju, formulu,...;
- izbaci uljeza;
- nacrtaj graf;
- očitaj jednadžbu grafa sa slike;
- riješi jednostavan zadatak.

Ako se ovakvi ispiti znanja sustavno provode, u načelu će polučiti višu ocjenu nego klasični ispit koji se provodi nakon njih. Ovo je sasvim prihvatljivo, jer "pravi" ispiti zahtijevaju više kognitivne razine znanja. Osim toga, prema sadašnjem *Pravilniku o ocjenjivanju*, ocjene "višeminutnih" ispita ne smiju se unositi u rubrike za ocjene, već samo u prostor za bilješke u imeniku. Namjera ovog članka nije odgovoriti na pitanje ima li to smisla i je li učenik time zakinut. Činjenica je da postignuta dobra ocjena na "teorijskom" ispitu ima kao posljedicu i bolji rezultat na redovnom ispitu znanja. Nije zanemarivo ni pozitivno afektivno ozračje.

Svjesni smo da "teorijski" ispiti znanja nisu neka novina te da se i inače provode. Ovdje smo željeli ukazati na njihov pozitivan učinak u nastavi matematike ako im se osmišljeno pristupi te se sustavno i svrsishodno provode.

Na sljedeće tri stranice dajemo primjenu triju provjera teorijskih znanja.

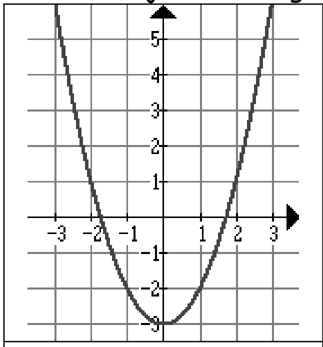
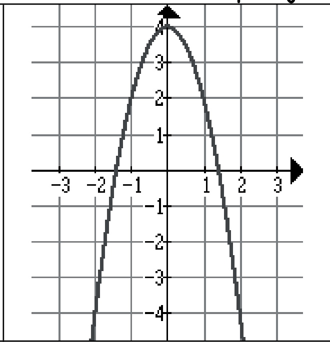
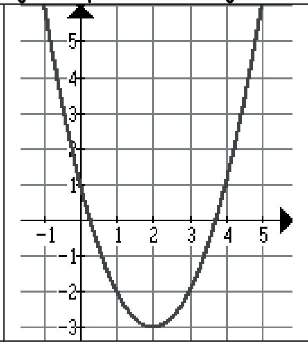
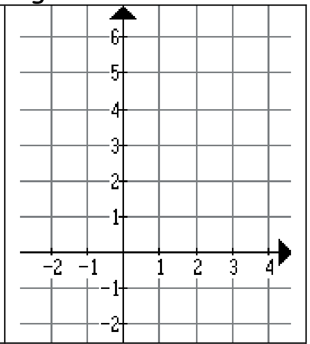


M. C. Escher: Nebo i voda I

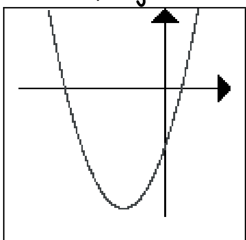
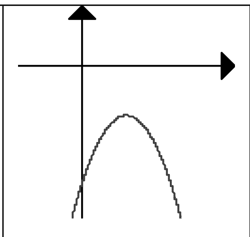
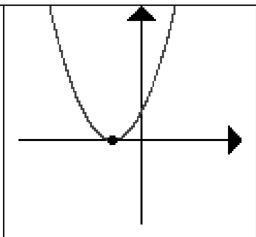
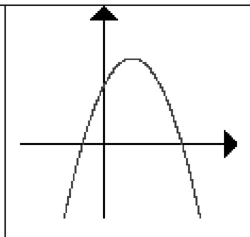
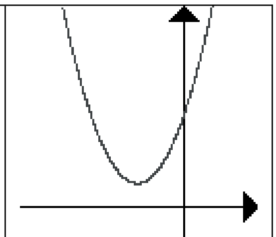
Polinom drugog stupnja i njegov graf

Kraći ispit poznavanja i razumijevanja osnovnih pojmova, činjenica i svojstava grafa

1. Funkcija oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdje su a, b, i c ____________________ naziva se ___ ______________________________ . Broj $a \neq$ ___ naziva se ____________________ ____________, broj b naziva se _________________________________, a c _________ _______________________ . Graf te funkcije je krivulja koja se zove ______________.
2. Ako je $a < 0$, parabola je otvorena: A. gore B. dolje. (zaokruži točan odgovor)
3. Što je $|a|$ veći, to je parabola ___________
4. Odredi jednadžbe grafova sa slika, a u posljednji stupac skiciraj zadani graf:

			
$f(x)=$	$f(x)=$	$f(x)=$	$f(x) = x^2 - 2x - 1$

5. Jednadžba kvadratne funkcije koja se dobije translacijom parabole $y = -2x^2$ za 3 ulijevo i 5 udesno glasi ____________________________. Njezino tjeme je u točki ____________.
6. Funkcija oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$ ima ekstrem u točki s apscisom ____________. Kako se dobije vrijednost ekstrema ____.
7. Funkcija $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ ima: A. minimum B. Maksimum. (zaokruži točan odgovor) Njegova je vrijednost ___________. Ta funkcija raste na intervalu _______________.
8. Apscisa točke u kojoj graf funkcije siječe x os zove se _____________________________.
9. Ako graf funkcije ne siječe x os, znači da je diskriminanta _____________________________.
10. Ako broj x zadovoljava kvadratnu nejednadžbu $ax^2 + bx + c < 0$, onda se točka grafa kvadratne funkcije s tom apscisom nalazi: A. iznad osi x B. ispod osi x.
11. Ispod danih sličica upiši odgovarajući redni broj ponuđenih kombinacija vrijednosti vodećeg koeficijenta i diskriminante.

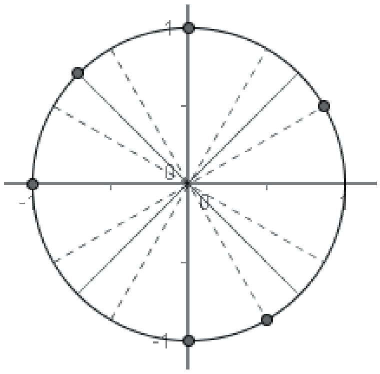
				

1. a<0, D<0 2. a<0, D=0 3. a<0, D>0 4. a=0, D<0 5. a=0, D=0
6. a=0, D>0 7. a>0, D<0 8. a>0, D=0 9. a>0, D>0

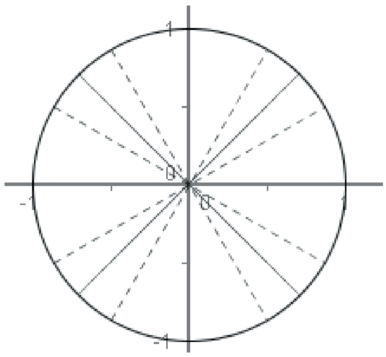
Kut i brojevna kružnica

Kratki ispit poznavanja osnovnih pojmova, preračunavanja mjera kuta i snalaženja na brojevnoj kružnici

1. Kut je ____.
   Označavamo ga s ______________________.
2. Ako iz početne zrake *p* dolazimo do završne zrake *q* vrtnjom u smjeru kazaljke na satu, tada uzimamo da je mjera kuta __________________.
3. Za glavnu mjeru α' kuta s mjerom α vrijedi: ____$\leq \alpha' <$________.
4. Glavna mjera kuta $\alpha = 480°$ je:
   A. 80° B. -120° C. 240° D. 120° E. -360°
5. Glavna mjera kuta od $\alpha = -780°$ je: ____________.
6. Središnji kut kružnice ima mjeru *1 rad* ako je ____
   ____.
7. Kako se određuje radijanska mjera kuta? ____
   ____.
8. Ispruženom kutu, kutu od 180° odgovara mjera od ________ rad.
9. Odredi u radijanima mjeru kuta od 22° 30': ____________________.
10. Odredi u stupnjevima mjeru kuta od $\frac{5\pi}{12}$ radijana: _________________.
11. Koliko stupnjeva ima 1 rad? ________________.
12. Broju $\frac{3\pi}{2}$ odgovara točka (__,__) brojevne kružnice.
13. Koji su sve brojevi pridruženi točki (0,1) brojevne kružnice? { _____________________}
14. U kojem se kvadrantu nalazi točka pridružena broju $t = 10$?
15. Istaknutim točkama brojevne kružnice na slici pridruži broj iz intervala $[0, 2\pi)$.



16. Istakni na brojevnoj kružnici točke pridružene brojevima: -3π, $-\frac{3\pi}{2}$, 10π, $\frac{17\pi}{6}$, $\frac{2005\pi}{3}$, $-\frac{23\pi}{4}$.



Razred:
Prezime i ime:

Realni brojevi

kratka provjera poznavanja osnovnih pojmova i simbola

1. Skup Z zatvoren je u odnosu na operacije _____________ , _____________ i _____________ .
2. Prekriži uljeza: $N \subset Z \quad I \subset Q \quad Q \subset R \quad Z \subset R$.
3. Nadopuni: $Q = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$.
4. Za koje je cijele brojeve *a* broj $\frac{1}{a-1}$ racionalan?

   A. a∈Z B. a > 1 C. a ∈ N D. a∈Z\{1} E. a = 1

5. Razlomke dijelimo tako da ____
   ____.
6. Svaki iracionalan broj moguće je zapisati u obliku razlomka $\frac{m}{n}$, gdje je m∈Z i n∈N.

   DA NE

7. Pomoću matematičkih simbola napiši svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju:
   ____ .
8. Točke brojevnog pravca možemo poistovjetiti s ______________________ brojevima. Zbog toga brojevni pravac još nazivamo ____.
9. Neutralni element za zbrajanje je _________, a za množenje _________.
10. Broj $\frac{1}{a}$ je __________________ broj broja a i označava se _________ .
11. Algebarski izraz sačinjavaju ____________________ i __________________ , a dobiva se pomoću
   ____.
12. Kažemo da je skup Q gust zato što ____
   ____.
13. Broj $\frac{x+y}{2}$ zove se ________________________________ brojeva ____________.

Literatura

[1] Teorija procjene znanja, `http://www.carnet.hr/referalni/obrazovni/spzit/pismeni/teorija/eval`

[2] Metodika nastave matematike, `http://www.im.ns.ac.yu/faculty/hercegd/Metodika/default.htm`

[3] Ziele des Mathematikunterrichts, `http://www.mathematik.ph-weingarten.de/%7Ehafenbrak/index.html`

[4] Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts, `http://www.uni-giessen.de/math-didaktik/did/`

[5] Dakić B., Elezović N.: *Matematika 2, priručnik za nastavnike*, Element, 2003, Zagreb.