Magični kvadrati - čarolija u brojevima

Tanja Debelec, Čakovec, Sandra Gračan, Zagreb

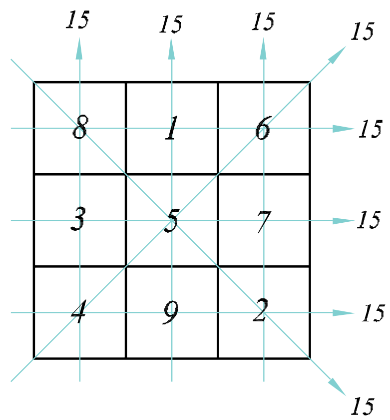
"Gdje je broj, tamo je ljepota."
Proclus

Sigurno ste se s problemom magičnih kvadrata već susreli — ako nigdje drugdje, onda u časopisima s križaljkama, rebusima i sličnim sadržajima. I dok ste s naporom pokušavali "izmozgati" dobitnu kombinaciju, možda ste poželjeli saznati i nešto više o tom neobičnom rasporedu brojeva!

Definicija

Magični kvadrat je kvadrat stranice n, podijeljen na n^2 jediničnih kvadrata, pri čemu su u kvadratima upisani prirodni brojevi od 1 do n^2 tako da je zbroj brojeva u svakom stupcu, u svakom retku i u objema dijagonalama jednak.

Broj n naziva se **red** (ili **dimenzija**) magičnog kvadrata. Za $n = 1$, magični kvadrat je trivijalan. Magični kvadrat 2. reda ne postoji, a na slici pogledajte jedan magični kvadrat 3. reda. Zbroj u svakom njegovom retku, u svakom stupcu i u objema glavnim dijagonalama iznosi 15.



Za magični kvadrat 4. reda zbroj je 34, a za magični kvadrat 5. reda on iznosi 65. Taj zbroj naziva se **magični zbroj** ili **magična konstanta** i lako se računa po sljedećoj formuli:

$$\begin{aligned} M(n) &= \frac{1}{n}(1+2+\ldots+n^2) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{1}{n}\cdot\frac{n^2\cdot(n^2+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}n(n^2+1). \end{aligned}$$

Danas se magičnim kvadratima nazivaju i kvadrati u kojima su upisani bilo koji prirodni brojevi tako da je zbroj u svakom retku, svakom stupcu i u objema dijagonalama jednak. To su **opći** magični kvadrati (za razliku od gore definiranih **normalnih** magičnih kvadrata). Tada se magična konstanta ne može izračunati po gornjoj formuli. Na primjer, u magični kvadrat mogu biti posloženi članovi rastućeg aritmetičkog niza. Ako je a njegov prvi član, a d razlika između svakih dvaju članova, tada ćemo magičnu konstantu računati ovako:

$$M(n;a,d) = \frac{1}{2}n[2a + d(n^2 - 1)].$$

U nastavku članka govorit ćemo o magičnim kvadratima, što uključuje i opće i normalne magične kvadrate.

Povijest

Magični kvadrati stoljećima su zanimali matematičare. Oni su potomak najstarije poznate misterije brojeva, legende Lo Shu (Lo-rijeka, Shu-knjiga). Pronađena je u Kini u knjizi "Yih King" prije više od 3800 godina.

Legenda kaže da je prije mnogo stoljeća jedna kornjača izašla iz rijeke Huang-He na obalu i na leđima svog oklopa imala čudan raspored točaka. Kada su ga ljudi precrtali, odgonetnuli su da skup točaka ima značenje magičnog kvadrata. Taj je kvadrat sadržavao prvih 9 prirodnih brojeva raspoređenih tako da je zbroj brojeva u svakom stupcu, u svakom retku i u objema dijagonalama bio jednak 15.

Magični kvadrat spominje se u grčkim zapisima iz 1300. godine prije Krista. U svojim radovima iz 130. godine poslije Krista opisuje ga Theon iz Smyrne. U 9. stoljeću arapski astronomi koristili su magične kvadrate pri crtanju horoskopa. U 11. st. spominje ga arapski pjesnik, filozof i astronom Abraham ben Ezra.

Magični kvadrati 4. reda prvi puta se spominju u indijskoj literaturi iz 12. stoljeća, a u isto vrijeme opisuju se ponovno i u kineskoj i u grčkoj literaturi.

Njemački fizičar i teolog iz 16. stoljeća Heinrich Cornelius Agrippa načinio je 9 magičnih kvadrata od 3. do 9. reda i svakom je pridružio po jedan od 7 tada poznatih planeta Sunčevog sustava.

Magični kvadrat 4×4 pronaći ćete i u gornjem desnom dijelu poznatog bakroreza iz 1514. godine *Melancolia 1*, velikog slikara Albrechta Dürera.

Prvi detaljniji rad na temu magičnih kvadrata objavio je francuski matematičar F. Bernard de Bessy 1693. godine. On je pokazao da postoji 880 magičnih kvadrata 4. reda i sve ih je ispisao.

Zanimljivo je da je najveći "ručno" izračunat magični kvadrat dimenzije 1111×1111. Izračunao ga je Norbert Behnke (Njemačka).

Magičnim kvadratima bavili su se iz hobija i mnogi uglednici. Jedan je od njih Benjamin Franklin. On se 1736./37. godine "zabavljao" konstrukcijom magičnih kvadrata i čak je u svojim radovima objavio dva magična kvadrata 8. reda.

Nakon pojave računala magični kvadrati više nisu "neriješena misterija", iako se još uvijek ne može točno odrediti koliko ih je za svaki n. Tako je uz pomoć računala 1973. godine dokazano da postoji 275 305 224 magičnih kvadrata 5. reda.

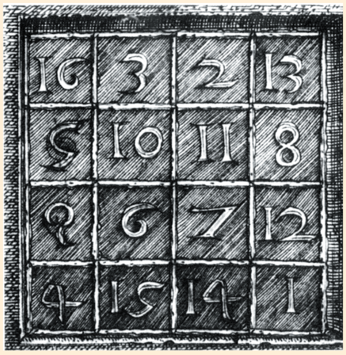
Broj kvadrata dimenzije 6×6 još nije točno određen, ali se procjenjuje (Monte Carlo simulacijom i metodama iz statističke mehanike) da ih postoji $(1.7745 \pm 0.0016) \times 10^{19}$.

Tom neobično lijepom rasporedu brojeva ljudi su pripisivali magična svojstva. Egipćani i Indijci vjerovali su da ih magični kvadrat štiti od nesreće, nosili su ga oko vrata, urezivali iznad kućnih pragova i čak ih prepisivali kao lijek protiv bolesti. Otuda i naziv "magični".

Pomoću računala pronađeni su sljedeći magični kvadrati:

— 105 × 105, Richard Suntag (SAD), 1975. god.;
— 501 × 501, Gerolf Lenz (Njemačka), 1979. god.;
— 897 × 897, Frank Tast, Uli Schmidt (Njemačka), 1987. god.;
— 1000 × 1000, Christian Schaller (Njemačka), 1988. god.;
— 2001 × 2001, Sven Paulus, Ralph Bulling, Jorg Sutter (Njemačka), 1989. god.;
— 2121 × 2121, Ralf Laue (Njemačka), 1991. god.;
— 3001 × 3001, Louis Caya (Kanada), 1994. god.

Veliki slikar Albrecht Dürer (Nürnberg, 1471. – 1528.) napravio je 1514. godine poznati bakrorez Melancolia 1 u čiji je gornji dio unio "supermagični" kvadrat 4 × 4).



Evo njegovih "supermagičnih" svojstva:

1. sva četiri kvadrata 2 × 2 u kutovima imaju zbroj 34;

2. srednji kvadrat 2 × 2 ima zbroj jednak 34;

3. zbroj brojeva u kutovima kvadrata je 34;

4. zbroj brojeva 15 i 14 u zadnjem redu te 3 i 2 u prvom redu je 34;

5. zbroj brojeva 5 i 9 u prvom stupcu, te 8 i 12 u zadnjem stupcu je 34;

6. ako oko kvadrata idemo u smjeru kazaljke na satu i biramo brojeve u polju pored onog u kutu (2, 8, 15, 9), njihov zbroj je 34; isto vrijedi ako idemo u suprotnom smjeru od kazaljke na satu (3, 5, 14, 12).

Osim toga, dva srednja broja u donjem redu daju godinu nastanka bakroreza, što je i godina smrti njegove majke.

Operacije s magičnim kvadratima

Zanimljivo je što sve možete "izvoditi" s magičnim kvadratima, a da i nakon transformacije oni ostanu magični.

Magični kvadrat možete rotirati za 90, 180 i 270 stupnjeva i njegove elemente možete zrcalno preslikati oko bilo koje od četiriju osi simetrije kvadrata. Rezultat će biti magični kvadrat u kojem su isti brojevi poredani drugačijim redom. I kompozicijom ovih dviju operacija ponovno ćete dobiti magični kvadrat s istim elementima. Zato se pri prebrojavanju magičnih kvadrata ne broje oni koji su dobiveni rotacijom i/ ili refleksijom nekog magičnog kvadrata. Svi magični kvadrati iz tog skupa pripadaju istoj skupini.

Međutim, od svakog magičnog kvadrata možemo dobiti potpuno novi magični kvadrat i to koristeći neka od ovih pravila:

1. Ako svim članovima magičnog kvadrata dodamo (ili oduzmemo) isti broj, ponovno dobivamo magični kvadrat.
   Pogledajmo primjer magičnog kvadrata 5 × 5, magične konstante 65, u kojem su smješteni prirodni brojevi od 1 do 25. Dodavanjem broja 6 dobivamo magični kvadrat magične konstante 95.

3	20	7	24	11
16	8	25	12	4
9	21	13	5	17
22	14	1	18	10
15	2	19	6	23

$+ 6 =$

9	26	13	30	17
22	14	31	18	10
15	27	19	11	23
28	20	7	24	16
21	8	25	12	29

2. Ako sve članove magičnog kvadrata s magičnom konstantom M pomnožimo istim brojem k, dobit ćemo magični kvadrat s magičnom konstantom $k \cdot M$.
Pogledajmo primjer magičnog kvadrata magične konstante 34. Množenjem svakog člana magičnog kvadrata brojem 3 dobivamo novi magični kvadrat magične konstante 102.

2	7	11	14
16	9	5	4
13	12	8	1
3	6	10	15

$\cdot\ 3 =$

6	21	33	42
48	27	15	12
39	36	24	3
9	18	30	45

Očito je sada da će vrijediti i sljedeće svojstvo:

3. Ako sve članove magičnog kvadrata pomnožimo nekim faktorom i dodamo neku konstantu, dobivamo novi magični kvadrat.
4. Zbroj (razlika) dvaju magičnih kvadrata istog reda opet je magični kvadrat. Zbrajaju (oduzimaju) se članovi na istim odgovarajućim mjestima (poljima).
Pogledajmo primjer razlike magičnih kvadrata 3×3, magičnih konstanti 42 i 15. Razlika ima magičnu konstantu 27.

17	10	15
12	14	16
13	18	11

$-$

2	9	4
7	5	3
6	1	8

$=$

15	1	11
5	9	13
7	17	3

Svojstva magičnih kvadrata

Proučavajući magične kvadrate, ljudi su uočili da razni magični kvadrati imaju različita, vrlo zanimljiva svojstva. Magični kvadrati mogu biti:

- pandijagonalni,
- simetrični,
- koncentrični,
- ultramagični,
- bimagični,
- složeni,
- savršeni. . .

Evo ukratko što znače neka od tih svojstava.

Ako svaki par centralno simetričnih elemenata magičnog kvadrata u zbroju daje $n^2 + 1$, radi se o **simetričnom** magičnom kvadratu. Loh Shu magični kvadrat je simetričan – broju 8 centralno je simetričan broj 2, broju 1 broj 9 itd. Uočimo još da je centar simetrije za magične kvadrate neparnog reda točka, a za magične kvadrate parnog reda srednje polje magičnog kvadrata.

Ako se svaki broj u normalnom magičnom kvadratu oduzme od n^2+1, dobije se novi magični kvadrat. On se naziva **komplement** polaznog magičnog kvadrata. Ako je komplement magičnog kvadrata jednak polaznom (tj. pripada istoj grupi s obzirom na rotaciju i refleksiju), kaže se da je polazni magični kvadrat **samo-komplementan**. Ako je još i simetričan, tada se kaže da je on **ultramagičan**.

Ako je zbroj na svim dijagonalama konstantan, uključujući dakle i zbroj članova na sporednim, "izlomljenim" dijagonalama, kaže se da je magični kvadrat **pandijagonalan**. Na dnu stranice pogledajte sliku pandijagonalnog magičnog kvadrata na kojem je istaknuta jedna sporedna slomljena dijagonala. Zbroj elemenata na svakoj od 8 rastućih i 8 padajućih izlomljenih dijagonala jednak je 65.

Ako je red magičnog kvadrata dvostruko paran, tj. $n = 4k$, ako je zbroj elemenata u svaka 2×2 podkvadrata jednak $2 \cdot (n^2 + 1)$ i ako svaki dijagonalan par brojeva međusobno udaljen $n/2$

18	22	10	14	1
9	11	3	17	25
2	20	24	6	13
21	8	12	5	19
15	4	16	23	7

18	22	10	14	1		
9	11	3	17	25		
2	20	24	6	13		
21	8	12	5	19		
15	4	16	23	7		

18	22	10	14	1		
9	11	3	17	25		
2	20	24	6	13		
21	8	12	5	19	21	
15	4	16	23	7		4

mjesta u zbroju daje $n^2 + 1$, kažemo da je magični kvadrat **savršen**. Na slici pogledajte savršen magični kvadrat 4. reda.

1	15	10	8
12	6	3	13
7	9	16	2
14	4	5	11

Ako u magičnom kvadratu svaki njegov član n_i kvadriramo i kao rezultat se dobije novi magični kvadrat, kažemo da je on **bimagičan**. Prvi bimagični kvadrat otkrio je francuz G. Pfeffermann 1890. godine. Ako je kvadrat magičan za n_i, n_i^2 i n_i^3, itd., tada imamo **trimagičan**, tj. **multimagičan** kvadrat.

Magični kvadrat u sebi može skrivati podkvadrate koji su sami za sebe opet magični. Kvadrat reda $m \cdot n$ je **složen** ako se može razbiti na m^2 magičnih podkvadrata reda n. Ponekad se unutar magičnog kvadrata mogu pronaći razni drugi magični oblici. Magični kvadrat može biti **koncentričan** ili **obrubljen** ako nakon brisanja ruba (tj. uklonimo li gornji i donji redak, te lijevi i desni stupac) opet dobijemo magični kvadrat. Drugi uvjet je da svi brojevi na rubu budu iz skupa $\{1, 2, \ldots, 2n-2\}$ i $\{n^2-2n+3, \ldots, n^2\}$. Na slici koncentričnog magičnog kvadrata 6. reda uočite unutarnji magični kvadrat 4. reda kojeg okružuje 10 "malih" brojeva između 1 i 10 (svi su manji od unutarnjih brojeva) i 10 "velikih" brojeva između 27 i 36 (svi su veći od unutarnjih brojeva).

36	2	3	7	32	31
4	26	13	12	23	33
9	15	20	21	18	28
27	19	16	17	22	10
29	14	25	24	11	8
6	35	34	30	5	1

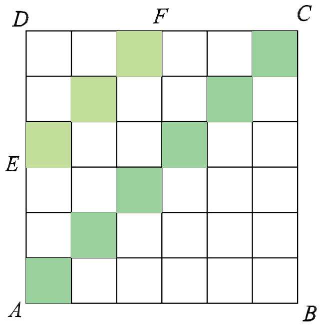
Tehnike izrade magičnih kvadrata

Za svaku od nabrojanih vrsta magičnih kvadrata postoje različiti algoritmi izrade. Da stvar bude još kompliciranija, za izradu magičnih kvadrata različitih dimenzija koriste se različiti algoritmi. No, u posebnim slučajevima postoje vrlo zanimljive tehnike slaganja koje nije teško naučiti.

Magični kvadrati neparnog reda

Čini se da je lakše izraditi magične kvadrate neparnog reda. Evo najprije jedne tehnike za magični kvadrat neparnog reda, u kojem brojevi čine aritmetički niz (svaka dva uzastopna člana razlikuju se za isti broj). Tada možemo koristiti **metodu simetričnog prebacivanja** francuskog matematičara F.B. de Bessyja.

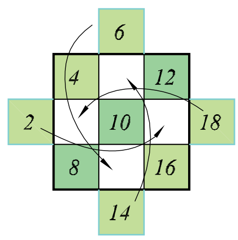
Metoda se sastoji od dodavanja pomoćnih polja malim dijagonalama magičnog kvadrata. U kvadratu $ABCD$ tipa $n \times n$ skup svih polja koja leže na dijagonali AC nazivamo "velikom" dijagonalom. Svaki skup polja koja određuju po jedan pravac paralelan "velikoj" dijagonali nazivamo "malom" dijagonalom (EF).



Sastavimo sada magični kvadrat 3×3 pomoću brojeva aritmetičkog niza 2, 4, 6, ... Kvadrat najprije nadopunimo novim "pomoćnim poljima" kao na slici.

Krećemo s dijagonalnim upisivanjem brojeva aritmetičkog niza 2, 4, 6, ... u osjenčana polja, i to redom, od krajnjeg lijevog polja.

Zatim upisujemo brojeve iz pomoćnih polja "simetričnim prebacivanjem" u kvadrat, te dobivamo magični kvadrat magične konstante 30.



4	14	12
18	10	2
8	6	16

Na donjoj slici pogledajte magični kvadrat 5×5 sastavljen na isti način od brojeva aritmetičkog niza 2, 4, 6, ...

Nakon crtanja pomoćnih polja te popunjavanja brojevima aritmetičkog niza 2, 4, 6, ... dobivamo:

				10				
			8		20			
		6		18		30		
	4		16		28		40	
2		14		26		38		50
	12		24		36		48	
		22		34		46		
			32		44			
				42				

Simetričnim prebacivanjem dobivamo traženi magični kvadrat:

6	32	18	44	30
40	16	42	28	4
14	50	26	2	38
48	24	10	36	12
22	8	34	20	46

Ovim pravilom jednostavno se rješava magični kvadrat neparnog reda, bez "pogađanja" ili "namještanja".

* * *

Za slaganje magičnih kvadrata neparnog reda koristi se i **Siamska tehnika**. Ispunjavanje polja započinjemo tako da broj 1 stavimo na bilo koje mjesto. (U našem primjeru izrade magičnog kvadrata 5. reda, broj 1 ćemo smjestiti u srednje polje gornjeg retka.) Svaki sljedeći broj upisuje se u polje koje se nalazi za jedno mjesto gore i udesno od prethodnog. Ako pritom "izađete" iz kvadrata, nastavlja se po istom pravilu na suprotnoj strani (zamislite da je kvadrat spojen u cilindar, pa nema "ispadanja"). Ako je polje na koje treba upisati broj već popunjeno, pomaknite se za 1 polje prema dolje i nastavite postupak.

	17	24	1	8	15
16	23	5	7	14	16
22	4	6	13	20	22
3	10	12	19	21	3
9	11	18	25	2	9
15	17	24	1	8	

Magični kvadrati parnog reda

Postoji nekoliko metoda za izradu magičnog kvadrata parnog reda. Ti su algoritmi vrlo komplicirani i uglavnom se koriste na računalima. No, evo jednog vrlo jednostavnog postupka za magični kvadrat reda $n = 4m$, $m \in \mathbf{N}$. Neka je na primjer $n = 8$. Najprije kvadrat popunite redom kao na slici:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

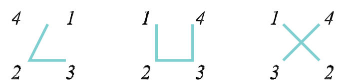
Zatim ucrtajte X-eve kroz svaki 4×4 podkvadrat. Svaki element a_{ij} na prekriženoj dijagonali zamijenite s $(n^2 + 1) - a_{ij}$. To u našem primjeru znači da smo umjesto 1 upisali 64, umjesto 4 – 61, umjesto 8 – 57 itd.

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

I na kraju, evo jedne malo kompliciranije, ali također vrlo interesantne metode za konstrukciju magičnih kvadrata reda $n = 4m + 2$, $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 1$. Smislio ju je J. H. Conway, a naziv **LUX** metoda je dobila po slovima L, U i X koja se koriste kao pomoć pri izradi.

Načinite kvadrat koji će se sastojati od $m + 1$ L-ova, jednog reda U-ova i $m - 1$ redaka X-eva duljine $n/2 = 2m + 1$. Srednji U zamijenite s L iznad njega. Konkretno, za $n = 10$ slijedi da je $m = 2$ i tada imamo:

$$
\begin{array}{ccccc}
L & L & L & L & L \\
L & L & L & L & L \\
L & L & L & L & L \\
U & U & U & U & U \\
X & X & X & X & X
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{ccccc}
L & L & L & L & L \\
L & L & L & L & L \\
L & L & U & L & L \\
U & U & L & U & U \\
X & X & X & X & X
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{ccccc}
17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\
23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\
4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\
10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\
11 & 18 & 25 & 2 & 9
\end{array}
$$



Siamskom metodom načinit ćemo magični kvadrat reda $2m + 1$ počevši od srednjeg mjesta u najgornjem retku. Mi smo takav magični kvadrat 5. reda već napravili u jednom od prethodnih primjera. Brojevi tog kvadrata određuju redoslijed popunjavanja malih 2×2 podkvadrata u velikom magičnom kvadratu kojeg želimo konstruirati, a slovo opisuje način na koji ćete u njih upisivati brojeve. U našem primjeru, najprije se popunjava gornji srednji 2×2 podkvadrat, zatim u najdonjem "retku" predzadnji podkvadrat, itd.

68	65	96	93	4	1	32	29	60	57
66	67	94	95	2	3	30	31	58	59
92	89	20	17	28	25	56	53	64	61
90	91	18	19	26	27	54	55	62	63
16	13	24	21	49	52	80	77	88	85
14	15	22	23	50	51	78	79	86	87
37	40	45	48	76	73	81	84	9	12
38	39	46	47	74	75	82	83	10	11
41	44	69	72	97	100	5	8	33	36
43	42	71	70	99	98	7	6	35	34

Zgodno, zar ne? A na Internet bolje da i ne gledate, mogli biste pronaći toliko informacija o magičnim kvadratima da vam se zavrti u glavi. Otvorite li na primjer stranicu `http://www.magic-squares.de`, moći ćete i sami konstruirati svoj magični kvadrat željene dimenzije i određenih svojstava. A možete pronaći i druge magične oblike: magične zvijezde (`http://www.geocities.com/~harveyh/`), magične krugove, možete pogledati magičnu kocku, možete slagati puzzle (`http://www.dubster.com/math/`), poigrati se s magičnim dominama, itd.

Pa vi onda recite da to nije **magično**!

Literatura

[1] `http://mathforum.org/alejandre/magic.square.html`.

[2] `http://www.magic-squares.de`

[3] `http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html`

[4] *Matematički list*, god. XIV, broj 3 (1979).

[5] Ivica Gusić, *Matematički rječnik*, Element, Zagreb 1995.