

Radionica

Zlatni rez

Nikola Skočić, Alena Dika i Diego Tich, Rijeka

Radionički oblici nastavnog rada potiču u učenicima kreativnost i istraživačko razmišljanje. Odmakom od redovne nastave i opuštajućom atmosferom u radionicama matematički sadržaji jednostavno i elegantno prodiru u učeniku svijest i nenametljivo oživljuju u svakome od njih matematički potencijal.

U to smo se iznova uvjerali održavši nedavno u našoj školi, OŠ Gornja Vežica u Rijeci, radionicu *Zlatni rez* s učenicima osmog razreda.

Zašto baš zlatni rez?

Čarolija zlatnog reza ili Božanske proporcije ili broja phi jest u porama matematike, arhitekture, glazbe, medicine te drugih znanstvenih disciplina i umjetnosti. Ona čini matematiku univerzalnom znanošću, otkrivajući njezinu sveprisutnost u različitim životnim područjima i razdobljima ljudskog postojanja. Mislili smo da je ova radionica dobar pokušaj da se ono apstraktno u matematici zamijeni nečim razumljivim, zabavnim i prihvatljivim. Nastojali smo je osmisлити tako da privuče pozornost i ostvari istraživačko razmišljanje kod svih, i onih koji "vole" i onih koji "ne vole" matematiku.

Pomoću zlatnog reza učenici mogu uočiti koliko je geometrija isprepletena s prirodom i gdje se geometrija pojavljuje u svakodnevnom životu.

Broj phi inspirirao je mnoge mislioce raznih znanstvenih disciplina kao ni jedan drugi koji se ikad pojavio u povijesti matematike. Stoga nije čudno što smo ga izabrali za temu radionice sa sljedećim obrazovnim ciljevima:

- razvijati učenikove spoznajne sposobnosti;

- osposobljavati učenike za praktičnu primjenu matematičkih sadržaja;
- poticati zanimanje za geometriju.

Planirano je da radionica traje dva školska sata.

1. Zadaci radionice

- pomoći učenicima da otkriju i nauče gdje se i kako zlatni rez pojavljuje u stvarnom životu;
- upoznati učenika s iracionalnim brojem phi, $\Phi = 1.618 \dots$;
- naučiti konstruirati zlatni rez na dužini i zlatni pravokutnik;
- upoznati ih s vezama matematike i prirodnih znanosti;
- pomoći učenicima da spoznaju da matematiku čovjek nije izmislio, već da je ona sveprisutna, a na čovjeku je samo da je stalno iznova otkriva, razumije i primjenjuje.

2. Tijek radionice (aktivnosti), [vrijeme trajanja]

Uvodni dio:

1. LJEPOTA MATEMATIKE ILI MATEMATIKA LJEPOTE [5']

Središnji dio

2. NAJLJEPŠI PRAVOKUTNIK [15']
3. ZLATNI UČENIK [20']

4. ZLATNI REZ [5']
5. ZLATNI REZ OKO NAS [10']
6. DEFINICIJA I KONSTRUKCIJA ZLATNOG REZA I ZLATNOG PRAVOKUTNIKA [20']

Završni dio

7. EVALUACIJA, RAZGOVOR, DOJMOVI, PLANIRANJE IZRADE PLAKATA, ZADATCI ZA UČENIKE [15']

3. Opis aktivnosti

1. AKTIVNOST: Ljepota matematike ili matematika ljepote

Učenici dobivaju nastavni listić s tekstom Geometrija prirode ili priroda geometrije s uputom da ga pažljivo pročitaju.

Geometrija prirode ili prirodna geometrija

Gledajući raznovrsnu pojavnost svoje okoline čovjek o njoj stječe neke intuitivne dojmove. Oblici kod gledaoca dobivaju za njega subjektivne karakteristike – vidi ih kao “vitke”, “zdepaste”, “elegantne” ili ne, sviđaju mu se ili ne sviđaju.

Ukus je bitan čimbenik čovječjih reakcija na podražaje: on će birati i oblikovati predmete i okolicu po nekom svom nahođenju, iako najčešće neće moći objasniti što je to što prepoznaje kao lijepo. “Ne znam što je umjetnost, ali znam što mi se sviđa”, izjava je koju često možemo čuti. “Sviđanje” se umeće i u prirodne pojave i oblike, lijepi su zalasci sunca, šarene krošnje stabala u jesen, puževi i školjke sa svojim vijugama; i cvijeće nas privlači sve do uključivanja u manire ponašanja – darujemo ga i njime ukrašavamo okolinu; u gradovima želimo što više parkova i zelenila, držimo kućne ljubimce, vikendom odlazimo u prirodu – prema kojoj očigledno osjećamo jaku pripadnost i ne želimo je se odreći. Ima li u svim tim nevidljivim osjećajima i ukusima nešto iz-

mjerljivo, izračunljivo, čime bismo dokazali i učinili vidljivom tu vezu čovjeka i prirode?

Učenici ne prepoznaju tekst kao tekst matematičkog sadržaja ali su pitanja koja im postavljamo nakon čitanja teksta matematičkog karaktera: Postoji li formula za ljepotu i harmoniju? Zašto je nešto lijepo ili ugodno oku? Dobili smo ove odgovore: zato što je prisutna simetrija, zato što su ugodne proporcije objekta koji promatramo, zato što nam unutarnji govor to kazuje.

Ovo su vrlo pametni i oštroumni odgovori. Pitanja su prividno jednostavna, ali vrlo apstraktna, a učenici ipak nalaze odgovore koji razvijaju radionicu u pravom smjeru.

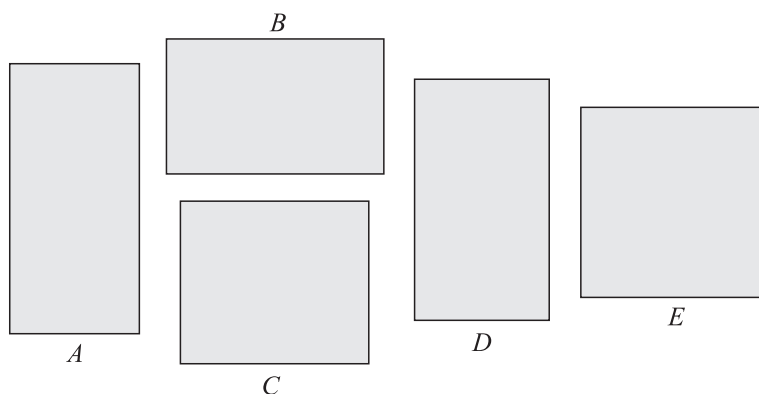
Važnost ove aktivnosti je u neizravnom spominjanju matematike, u doticaju s apstraktnim te u pobuđivanju zanimanja.

Naime, u ovom dijelu radionice uspjeli smo probuditi znatiželju u svakom učeniku. Oni nestrpljivo čekaju nastavak. U toj nestrpljivosti i znatiželji kako pronaći “matematiku ljepote” nalazi se “ljepota matematike”. Zato smo ovu aktivnost tako i nazvali.

2. AKTIVNOST: Najljepši pravokutnik

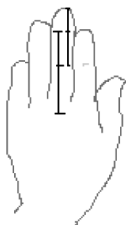
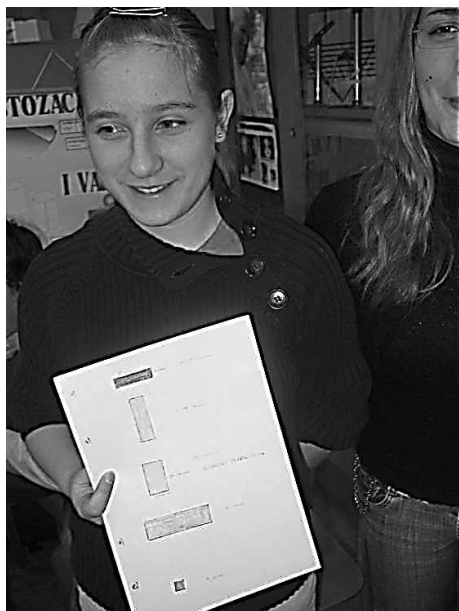
Ova aktivnost je simulacija poznatog Fetcherovog eksperimenta iz 1876. godine u kojem je većem broju ispitanika ponuđeno da od deset pravokutnika, od kojih je samo jedan zlatni, tj. s duljinama stranica u omjeru 21:34, izaberu najljepši. Učenicima je predloženo da u razmišljanju o odabiru, boje pravokutnike. I u našem eksperimentu, najviše učenika je odabralo zlatni pravokutnik.

Budući da je skupina u kojoj smo izveli eksperiment malobrojna, nastojali smo sugestivnim pitanjima učenike navesti da odaberu zlatni pravokutnik. Npr.: Kakvog oblika biste voljeli imati prozore na svojoj kući? ili Koje biste formate sliku voljeli imati na zidu svoje sobe?. Ovakvim sugeriranjem nismo htjeli osigurati rezultat svog eksperimenta, već smo, osiguravajući odabir zlatnog pravokutnika, nastojali



usmjeriti tijek radionice i potaknuti pobuđenu zanitiželju.

Važnost ove aktivnosti je u mogućnosti ponavljanja i uvježbavanja jednog dijela matematičkog sadržaja: postotak (izražavanje broja odabira svakog pravokutnika u postotku; možda bi se tu moglo govoriti i o statistici), decimalni brojevi, omjeri i proporcije.



3. AKTIVNOST: Zlatni učenik

Tijekom ove aktivnosti učenici će u opuštenoj atmosferi u parovima pronalaziti zlatne omjere u građi vlastitog tijela. Na već pripremljen nastavni listić upisuju duljine određenih dijelova tijela i računaju zadane omjere zapisujući ih na listić.

Dio pripremljenog listića:

Koristeći metar i kalkulator izmjeriti svaki dio tijela naveden u listiću, zapisati sljedeće razlomke i pretvoriti ih u decimalne brojeve zaokružujući tisućinku.

A.

Izmjeriti visinu osobe (VO) od poda do vrha glave i duljinu od poda do pupka (PP). Zapisati razlomak $\frac{VO}{PP}$ i pretvoriti ga u decimalni broj.



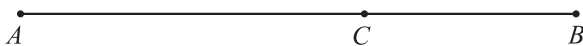


Svi su učenici u ovom dijelu radionice aktivno uključeni u eksperiment. Naglasak je na njihovoj međusobnoj komunikaciji, suradnji i razvijanju timskog načina rada.

Broj phi se, iako učenici još nisu upoznati s njim, sve više pojavljuje. Oni uočavaju njegovo pojavljivanje i pitaju što taj broj znači.

4. AKTIVNOST: Zlatni rez

U ovom dijelu radionice učenici će biti upoznati s definicijom zlatnog reza, broja phi, $\Phi = 1.618 \dots$ i s pojmom zlatnog pravokutnika. Dužina je podjeljena u zlatnom omjeru ako se *veći dio prema manjem odnosi kao cjelina prema većem dijelu*.



Točka C dijeli zadanu dužinu $\overline{AB}$ u omjeru zlatni rez ili u zlatnom omjeru ako vrijedi

$$|AB| : |AC| = |AC| : |CB|$$

$\Phi = 1.618 \dots$ je iracionalan broj.

Tijekom ove aktivnosti ponovit ćemo:

- skupove brojeva, iracionalne brojeve
- dijeljenje dužine u zadanom omjeru

5. AKTIVNOST: Zlatni rez oko nas

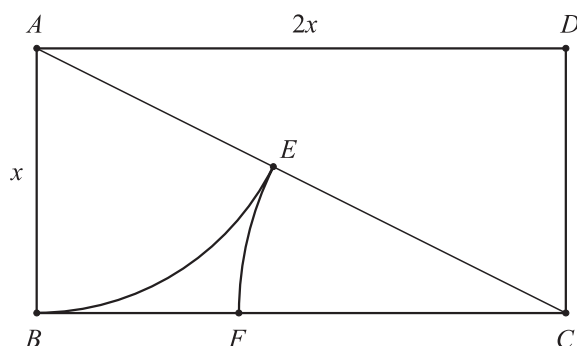
Profesor Branimir Dakić je nedavno u jednom broju *Miš*-a rekao da *apstraktni sadržaj može biti prirodno nametnut odabirom konkretnih, razumljivih i vizualnih primjera u povijesnom tijeku nastajanja matematičkih znanja, te njihovim širokim djelovanjem i primjenom u životu*.

Vođeni tom idejom osmislili smo ovu aktivnost pokazujući učenicima gdje se, kako i kada zlatni rez pojavljivao u znanstvenim disciplinama i umjetnosti. Uz pomoć *PowerPoint* prezentacije i projektora učenicima su na panoi predložene slike:

- Partenon, 5. st. pr.n.e., u Periklovo doba vladavine Grčkom Fidijom je izradio prostorni plan Akropole na kojoj je izgrađen hram božici Ateni, Partenon. Ova impozantna građevina izgrađena je u zlatnom rezu;
- Kineski zid, izgrađen oko 3000. pr.n.e., je izgrađen na osnovama zlatnog omjera;
- Mona Lisa Leonarda da Vincija – ovaj je umjetnik uvijek iznova koristio čaroliju zlatnog reza u stvaranju svojih umjetničkih djela;
- likovna umjetnost – suvremeno likovno oblikovanje zasniva se poznavanju i primjeni zakonitosti zlatnog reza;
- glazbeni instrumenti konstruirani su uz korištenje zlatnog reza;
- kardiogram: intervali otkucaja srca nalaze se u zlatnom omjeru;
- estetska kirurgija primjenjuje zlatni rez;
- omjer muških i ženskih pčela u košnici je u zlatnom omjeru.

Ova aktivnost može predstavljati poticaj za korelaciju matematike s drugim nastavnim predmetima. Učenici uočavaju povezanost matematike s mnogim znanstvenim disciplinama, otkrivaju i uče o njezinoj životnosti i postojanju u prošlosti, svakodnevnici i suvremenosti.

6. AKTIVNOST: Konstrukcija zlatnog reza i zlatnog pravokutnika



Točka F dijeli dužinu $\overline{BC}$ u zlatnom rezu. Opišimo postupak:

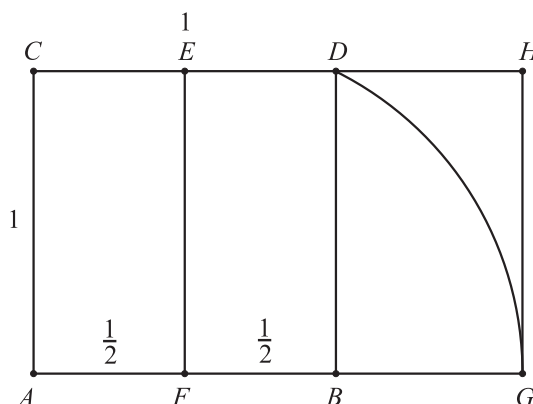
Dužina $\overline{AC}$ je dijagonala pravokutnika čije su stranice duljina x i $2x$:

$$\begin{aligned} |AC| &= \sqrt{(2x)^2 + x^2} = \sqrt{4x^2 + x^2} \\ &= \sqrt{5x^2} = x\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Jer je $|AE| = x$, $|EC| = x\sqrt{5} - x = |FC|$.

Konačno,

$$\begin{aligned} |BC| : |FC| &= 2x : (x\sqrt{5} - x) = \frac{2x}{x(\sqrt{5} - 1)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5} - 1} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{4} \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \Phi = 1.618\dots \end{aligned}$$



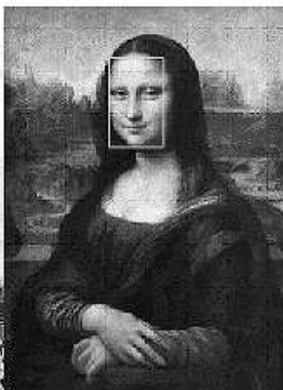
Dužina $\overline{FD}$ je dijagonala pravokutnika FBDE kojem su duljine stranica 1 i $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} |FD| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} \\ |FD| &= \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ |FD| &= |FG|. \end{aligned}$$

Zlatni pravokutnik je pravokutnik AGHC jer mu se stranice nalaze u omjeru

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + |FG|\right) : |GH| &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) : 1 \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi = 1.618\dots \end{aligned}$$

Tijekom ove aktivnosti učenici razvijaju osjećaj za preciznost i urednost, ponavljaju konstrukciju $\sqrt{5}$. Oni koji su s lakoćom ovladali konstrukcijom pomažu ostalim učenicima u njezinoj izvedbi.



7. AKTIVNOST: Evaluacija radionice

Dario Malnar 8.c kaže:

“Prije nekoliko dana na neuobičajenom satu matematike učili smo o fenomenu zlatnog reza. Naučili smo nešto o poznatim djelima u kojima je zlatni rez odigrao važnu ulogu (Mona Lisa...). Njime su se koristili stari Grci, Rimljani i drugi. Naime, u slikarstvu i kiparstvu umjetnici su se nesvjesno vraćali na zlatni rez. Sat mi se posebno svidio jer su nastavnici aktivno sudjelovali s nama u nastavi. Bilo je super!

Volio bih kada bi bilo više sati ovakve vrste.”

Damjan Linić 8.c kaže:

“Na satu radionice podijelili smo se u grupe, te dobili zadatke. Zadaci su bili temeljeni na mjerenju dijelova tijela i računanju omjera. Bojili smo geometrijske likove i kasnije odabrali najljepšeg našem oku.

Na ovoj radionici naučio sam da se matematika nalazi svuda oko nas, samo u različitim oblicima.”

Borna Cicvarić 8.c kaže:

“Tema radionice bila mi je zanimljiva i svidio mi se način na koji smo tu temu obrađivali. Već sama atmosfera u razredu bila je opuštenija i zabavnija nego na redovnim satima. Saznao sam puno informacija koje su mi bile interesantne i potiču na razmišljanje.

Ja sam na ovakav način više zapamtio o zlatnom rezu, nego da sam o tome čitao iz knjige. Posebno mi je bilo zanimljivo što se meni i većini učenika u razredu svidio Božanski pravokutnik.

Neobično mi je što ljudi zlatni rez tako uočavaju i primjenjuju i to ću dobro zapamtiti.”

Na kraju radionice dogovorili smo se kako izraditi plakat koji bi sažeto opisao radionicu i njezin tijek.

Učenici su također upućeni na uočavanje i istraživanje zlatnog reza u svojoj okolini.

4. Zaključak

Ova radionica održana je s učenicima 8. razreda. Ona se uz određene korekcije može prilagoditi bilo kojoj dobi učenika osnovne škole. Na kraju radionice bili su zadovoljni učenici i mi učitelji. Kao da smo ponirali ispod površinskog praga učeničke svijesti i učili ih da otkrivaju kako im je matematika tako bliska a to ne primjećuju.

Željeli smo da ovo bude samo igra koje će pružiti određeno spoznajno iskustvo i razviti želju za istraživanjem. Možda će je netko ozbiljnije shvatiti i posegnuti za dodatnim izvorima znanja ili primijeniti naučeno. Samim time postat će interesantnija, kreativnija i korisnija.



Internet adrese:

<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/phi.html>

<http://milan.milanovic.org/math/srpski/andrej/Phi.pdf>

<http://home.att.net/~vmueller/prop/theo.html>

<http://www.markwahl.com/golden-ratio.htm>

http://www.math.csusb.edu/courses/m129/golden/golden_ratio.html

<http://math.rice.edu/%7Elanius/Geom/golden.html>

<http://plus.maths.org/issue22/features/golden/index.html>