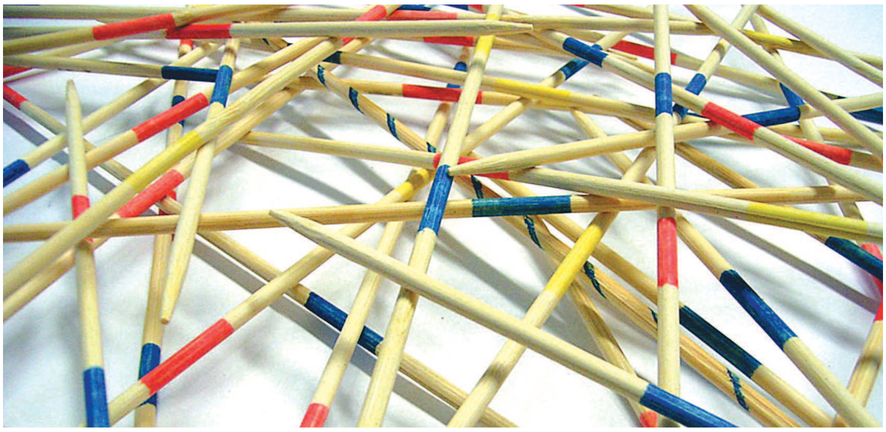
Mimoilazni pravci

Ela Rac Marinić Kragić, Zagreb



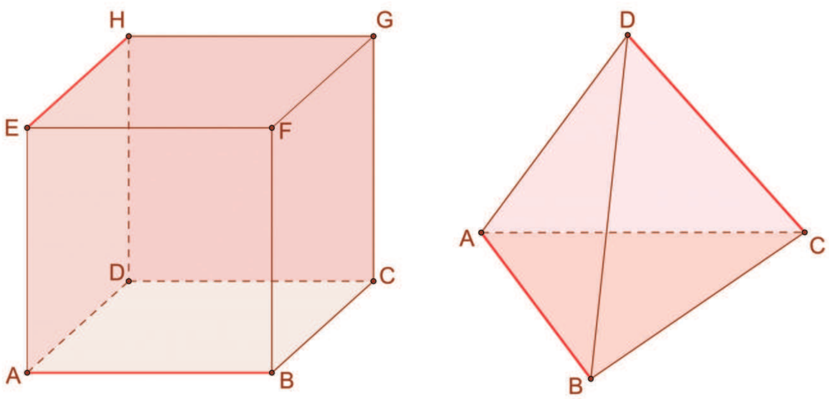
Dva se pravca u ravnini ili sijeku ili ne sijeku. Ako se sijeku, sjecište može biti jedna točka, a pravci se mogu i poklapati. Ovaj drugi slučaj zajedno sa slučajem kada dva pravca nemaju zajedničkih točaka često se svrstava pod paralelnost pravaca.

Isto se proširuje i na odnose pravaca u prostoru. No pravci u prostoru mogu biti u još jednom međusobnom odnosu, oni mogu biti **mimoilazni** ili **mimosmjerni**. Dva mimoilazna pravca niti se sijeku niti su paralelni. Neka je zadana kocka $ABCDEFGH$. Pravci AB i EH su mimoilazni pravci. Uzmimo tetraedar $ABCD$. Pravci AB i CD su mimoilazni pravci (pogledaj sliku 1).

Za svaka dva pravca prostora koji se sijeku ili su paralelni postoji ravnina koja ih sadrži. Možemo također reći kako dva pravca prostora koja se sijeku u jednoj točki ili su paralelna (ali se ne podudaraju) jednoznačno određuju ravninu. Ne postoji ravnina koja sadrži dva mimoilazna pravca. Ova posljednja činjenica mogla bi poslužiti i kao definicija:

Mimoilazni pravci su pravci koji ne leže u istoj ravnini.

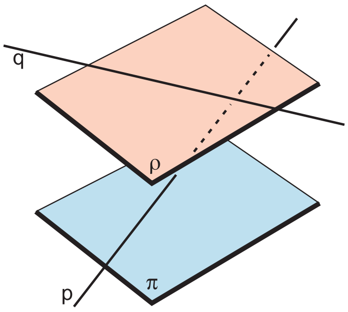
O mimoilaznim se pravcima u nastavi matematike govori malo. Pojavljuju se u nastavi geometrije prostora već u 8. razredu osnovne škole, a potom i u 2. razredu srednje škole, a mogu se naći i



Slika 1.

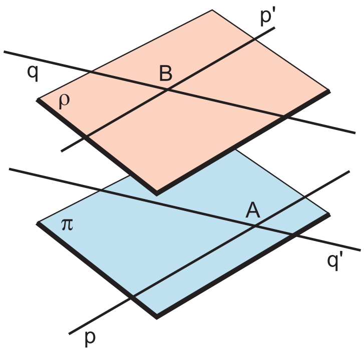
u 3. razredu srednje škole u zadacima vezanim uz vektore u prostoru.

I uvijek učenici imaju teškoća pri rješavanju zahtjevnijih zadataka vezanih uz ovo gradivo. Zbog toga ćemo u ovom članku posvetiti malo više pažnje mimoilaznim pravcima i na primjerima prikazati kako se rješavaju neki najčešći problemi vezani uz njih.



Slika 2.

Rekli smo da ne postoji ravnina koja sadrži dva mimoilazna pravca, ali mimoilazni pravci (slika 2) leže u paralelnim ravninama. Za svaka dva mimoilazna pravca p i q postoje paralelne ravnine π i ρ, tako da je $p \in \pi$ i $q \in \rho$. Odaberimo po volji točku $A \in p$ i njome povucimo pravac q' paralelan s pravcem q (slika 3). Ravnina π je određena pravcima p i q', $p \in \pi$. Također uzmimo bilo koju točku $B \in q$ i njome povucimo pravac p' paralelan s pravcem q. Ravnina ρ određena je pravcima q i p', $q \in \rho$. Te su dvije ravnine određene dvama parovima međusobno paralelnih pravaca pa su i one međusobno paralelne.

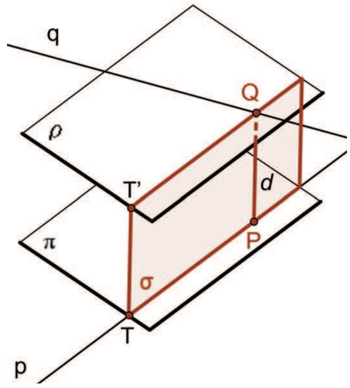


Slika 3.

Kod određivanja paralelnih ravnina u kojima leže mimoilazni pravci, pravcem p povucimo ravninu π koja je paralelna pravcu q, a zatim pravcem q ravninu ρ koja je paralelna s p ili s već konstruiranom ravninom π.

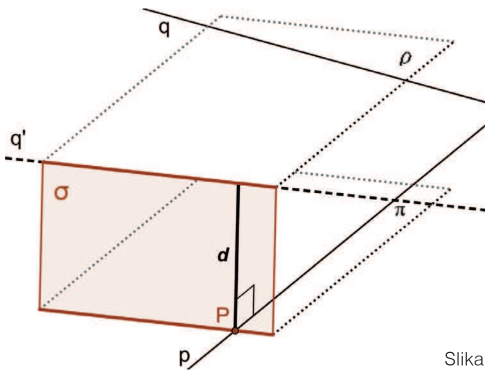
Udaljenost mimoilaznih pravaca

Udaljenost mimoilaznih pravaca jednaka je udaljenosti paralelnih ravnina π i ρ. Možemo reći da je udaljenost mimoilaznih pravaca jednaka duljini odsječka kojeg ti pravci odsijecaju na njihovoj zajedničkoj okomici.



Slika 4.

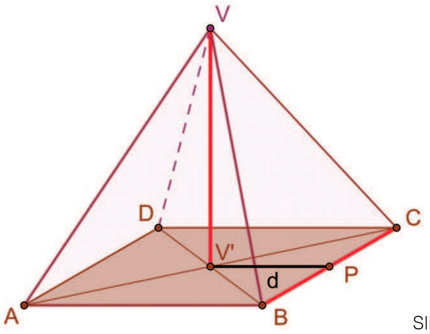
Kako bismo odredili udaljenost dvaju mimoilaznih pravca nađimo prvo paralelne ravnine u kojima leže mimoilazni pravci p i q. To su ravnine π i ρ. Odaberimo ravninu σ koja je na njih dvije okomita, a prolazi pravcem p. Ta ravnina siječe pravac q u točki Q, a njezina ortogonalna projekcija na ravninu π je točka P. PQ je zajednička okomica mimoilaznih pravaca i njezina duljina $|PQ|$ jednaka je udaljenosti d tih pravaca (slika 4). Traženu udaljenost možemo odrediti i kao udaljenost paralelnih ravnina π i ρ tako da bilo gdje na pravcu p odaberemo točku T, a zatim nađemo njezinu ortogonalnu projekciju T' na ravninu ρ (slika 4). Tražena udaljenost bit će jednaka $|TT'|$.



Slika 5.

Također možemo postupiti i ovako: nađimo ravninu σ koja je okomita na pravac p i zatim odredimo ortogonalne projekcije pravaca p i q na tu ravninu. Projekcija pravca p je točka P, a pravca q je pravac q'. Udaljenost d mimoilaznih pravaca jednaka je udaljenosti točke P od pravca q' (slika 5). Ova metoda je praktična kod mimoilaznih pravaca koji su međusobno okomiti.

Primjer 1. Nacrtaj pravilnu četverostranu piramidu s osnovkom $ABCD$ i vrhom V. Odredi udaljenost pravaca VV' i BC, ako je duljina osnovnog brida piramide 24 cm, a bočnog 20 cm.

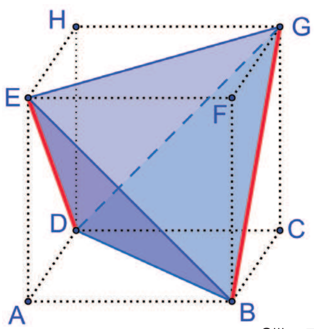


Slika 6.

Rješenje: Ravnina osnovke $ABCD$ okomita je na pravac VV'. Ortogonalna projekcija pravca VV' je točka V' (središte osnovke), a pravac BC već pripada toj ravnini. Tražena udaljenost d jednaka je udaljenosti točke V' od pravca BC, tj. jednaka je duljini polovine brida osnovke (slika 6) i iznosi 12.

Primjer 2. Kolika je udaljenost mimosmjernih bridova pravilnog tetraedra ako mu je duljina brida a?

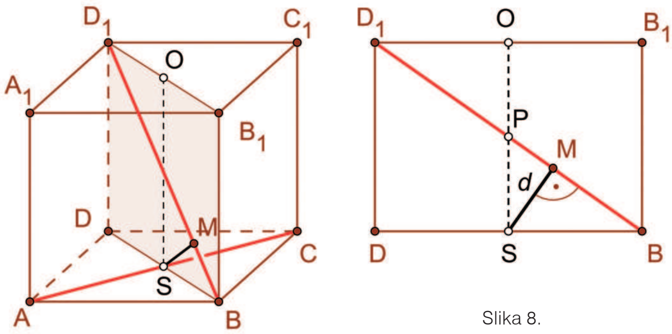
Rješenje: Zadatak ćemo najbrže riješiti ako tetraedar smjestimo u kocku tako da mu bridovi leže na dijagonalama strana kocke (slika 7). Tada je duljina brida kocke $\frac{a}{\sqrt{2}}$. $\overline{ED}$ i $\overline{BG}$ su mimoilazni bridovi tetraedra. Oni leže na paralelnim stranama $ADHE$ i $BCGF$ kocke, pa je udaljenost mimoilaznih bridova jednaka udaljenosti tih strana kocke i jednaka je duljini brida kocke, dakle iznosi $\frac{a}{\sqrt{2}}$.



Slika 7.

Primjer 3. Odredi udaljenost prostorne dijagonale BD_1 kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ i dijagonale AC osnovke kocke, ako je duljina brida kocke jednaka a.

Rješenje: I opet je praktično naći ravninu DBB_1D_1 koja je okomita na pravac AC (pravac je okomit na ravninu ako je okomit na dva pravca koja joj pripadaju – ovdje su to pravci BD i SO) a kojoj pripada dijagonala $\overline{BD_1}$. Tražena udaljenost jednaka je udaljenosti točke S (ortogonalna projekcija pravca AC na ravinu DBB_1D_1) od $\overline{BD_1}$ (slika 8). Udaljenost $\overline{MS}$ možemo izračunati iz sličnosti trokuta SMB i DD_1B. Kako je $\frac{|SB|}{|D_1D|} = \frac{d}{a}$, tada je $d = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

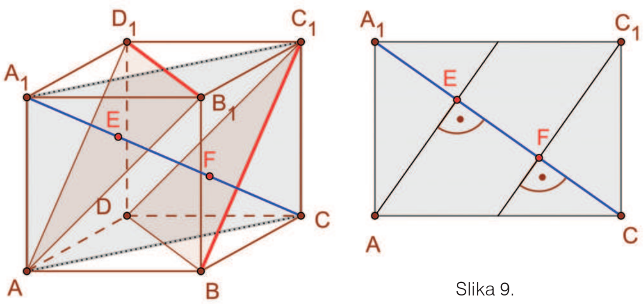


Slika 8.

Primjer 4. Kolika je udaljenost pravaca kojima pripadaju mimoilazne plošne dijagonale kocke $\overline{BC_1}$ i $\overline{D_1B_1}$?

Rješenje: Konstruirajmo paralelne ravnine AB_1D_1 i DBC_1 (ravnine su paralelne jer je $AB_1 \parallel DC_1$ i $AD_1 \parallel BC_1$) koje sadrže dijagonalu $\overline{D_1B_1}$ odnosno $\overline{BC_1}$. Povucimo pravac koji je okomit na te dvije ravnine i probada ih u točkama E, odnosno F – to je pravac kojem pripada prostorna dijagonala $\overline{A_1C}$ ($\overline{A_1C} \perp \overline{AE}$, $\overline{A_1C} \perp \overline{B_1D_1}$ a također $\overline{A_1C} \perp \overline{CF}$, $\overline{A_1C} \perp \overline{BD}$). Tražena udaljenost jednaka je duljini dužine $\overline{EF}$. Iz slike 9 lako uočimo (sličnost i sukladnost trokuta):

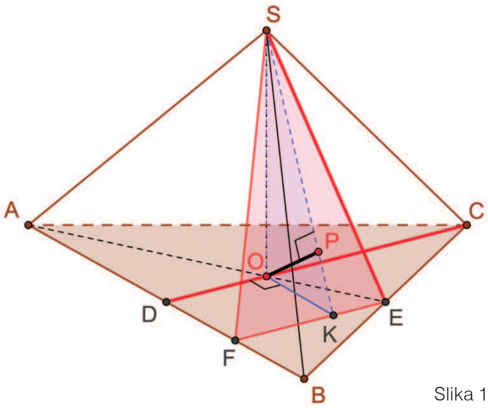
$$AE_1 = EF = FC = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Slika 9.

Primjer 5. Odredi udaljenost između mimoilaznih plošnih visina pravilnog tetraedra duljine stranice a.

Rješenje: 1. Odredimo prvo udaljenost visina $\overline{CD}$ i $\overline{SE}$ (slika 10). Kroz točku E povucimo paralelu $\overline{EF}$ s $\overline{CD}$. $\overline{CD}$ je paralelna s ravninom SFE. Tražena udaljenost jednaka je udaljenosti točke O (koja pripada visini $\overline{CD}$) od ravnine SFE. Zato povucimo $\overline{OK} \perp \overline{EF}$ i spojimo vrh piramide S s točkom K. Ravnine SFE i SOK su okomite ($\overline{EF} \perp \overline{OK}$ i $\overline{EF} \perp \overline{SK}$). Okomica iz O na ravninu SEF leži u ravnini SOK, a probada SFE u



Slika 10.

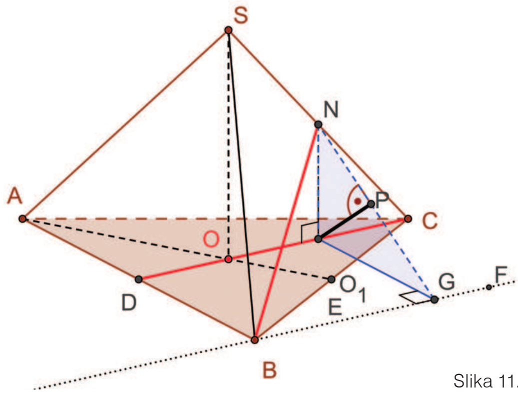
točki P.

Duljina dužine $\overline{OP}$ je tražena udaljenost dviju mimoilaznih visina $\overline{CD}$ i $\overline{SE}$. Iz sličnosti trokuta SOK i OPK izlazi $|OP| = \dfrac{|SO| \cdot |OK|}{|SK|}$.

Kako je $|SO| = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, $|OK| = |DF| = \dfrac{a}{4}$ i $|SK| = \sqrt{|SO|^2 + |OK|^2} = \dfrac{a\sqrt{105}}{12}$, tražena udaljenost je $|OP| = \dfrac{a\sqrt{70}}{35}$.

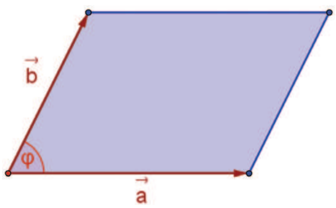
2. Slično možemo naći udaljenost između plošnih visina $\overline{CD}$ i $\overline{BN}$ (slika 11).

Povucimo pravac BF paralelan visini $\overline{CD}$. Ravnina NBF je paralelna s $\overline{CD}$. Konstruiramo ravninu $NO_1G \perp NBF$. Spustimo okomicu iz O_1 na $\overline{NG}$ i kao presjek dobijemo točku P. Tražena udaljenost je $|O_1P|$. Ponovo iz sličnosti trokuta i pripadnih elemenata nađemo $|O_1P| = \dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.



Slika 11.

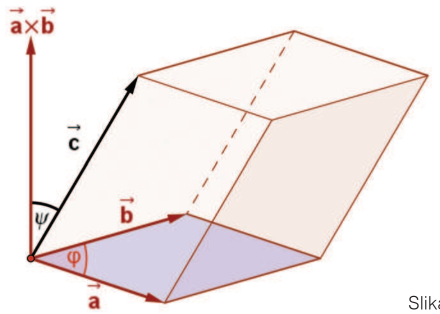
Ponekad nam u rješavanju ovakvih problema može pomoći i vektorski račun. Znamo da je apsolutna vrijednost vektorskog umnoška jednaka iznosu površine paralelograma kojeg razapinju ta dva vektora, tj. $P = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin\varphi$ (slika 12).



Slika 12.

Također je apsolutna vrijednost mješovitog umnoška triju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jednaka obujmu paralelepipeda kojeg razapinju ti vektori tj.

$$V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot |\vec{c}| \cos\psi.$$

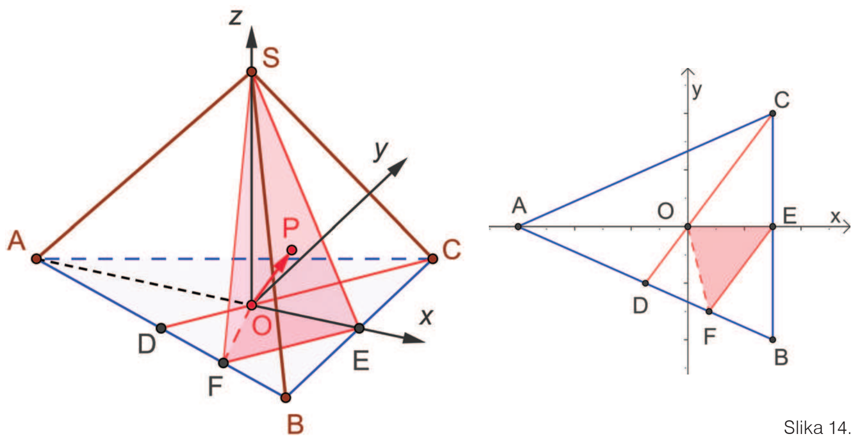


Slika 13.

Pri tome je ψ kut kojeg zatvaraju vektori $\vec{a}\times\vec{b}$ i $\vec{c}$ (slika 13).

Tako zadatak iz primjera 5. pod 1. možemo riješiti na sljedeći način:

Dovoljno je konstruirati ravninu SFE paralelnu visini $\overline{CD}$. Smjestimo tetraedar u koordinatni sustav kao na slici 14 tako da je ishodište u točki O, stranica $\overline{BC} \parallel y$, a $\overline{AE}$ pripada osi x. Vrh piramide S pripada osi z. Sada odredimo koordinate točkama, pa vrijedi:



Slika 14.

$$A\left(-\frac{a\sqrt{3}}{3},0,0\right), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{6},-\frac{a}{2},0\right), C\left(\frac{a\sqrt{3}}{6},\frac{a}{2},0\right)$$

$$D\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12},-\frac{a}{4},0\right), E\left(\frac{a\sqrt{3}}{6},0,0\right), F\left(\frac{a\sqrt{3}}{24},-\frac{3a}{8},0\right)$$

(D je polovište od $\overline{AB}$, a F polovište od $\overline{DB}$), $S\left(0,0,\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)$.

Traženu udaljenost $\left|OP\right|$ možemo izračunati iz volumena piramide $FEOS$. S jedne strane volumen piramide izračunamo ovako:

$$V=\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{OF}\times\overrightarrow{OE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SO}\right|\cdot\cos 0°=\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{OF}\times\overrightarrow{OE}\right|\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$=\frac{a\sqrt{6}}{9}\cdot\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{a\sqrt{3}}{24} & -\frac{3a}{8} & 0\\ \frac{a\sqrt{3}}{6} & 0 & 0\end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{a\sqrt{6}}{9}\cdot\left|\frac{a^2\sqrt{3}}{16}\vec{k}\right|=\frac{a^3\sqrt{2}}{48}. \qquad (1)$$

S druge strane možemo ga izračunati na ovaj način:

$$V=\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{SF}\times\overrightarrow{SE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\cos 0°=\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{SF}\times\overrightarrow{SE}\right|\cdot\overrightarrow{OP}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{a\sqrt{3}}{24} & -\frac{3a}{8} & -\frac{a\sqrt{6}}{3}\\ \frac{a\sqrt{3}}{6} & 0 & -\frac{a\sqrt{6}}{3}\end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\left|\frac{a^2\sqrt{6}}{8}\vec{i}+\frac{3a^2\sqrt{2}}{24}\vec{j}+\frac{a^2\sqrt{3}}{16}\vec{k}\right|$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\frac{a^2\sqrt{35}}{16}. \qquad (2)$$

Iz jednakosti (1) i (2) izlazi $\left|\overrightarrow{OP}\right|=\frac{a\sqrt{70}}{35}$.

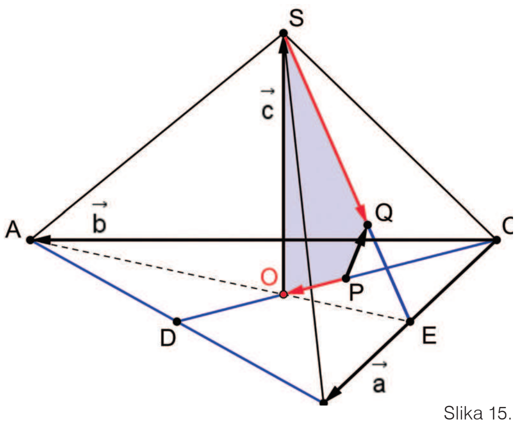
Ako se ne želimo igrati koordinatama točaka i konstrukcijom ravnine paralelne pravcu CD možemo krenuti i drukčijim putem. Nije nimalo lakši (u ovom primjeru) ali je praktičan u slučaju ako su mimoilazni pravci u prostoru zadani koordinatama točke i vektorom smjera (ili koordinatama dviju točaka što se svodi na isto).

Ideja je sljedeća: Neka je $\overline{PQ}$ zajednička okomica pravaca CD i SE (vidi sliku 15). Vrijedi:

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SQ}.$$

Odredimo vektorsku bazu trima linearno nezavisnim vektorima – neka je $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$ i za treći vektor uzmimo $\vec{c}=\overrightarrow{OS}$ koji je okomit na prethodna dva vektora. Tada možemo pisati

$$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},\quad \overrightarrow{SE}=\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}.$$



Slika 15.

$$\overrightarrow{PQ} = \alpha\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS} + \beta\overrightarrow{SE}$$
$$= \alpha\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) + \vec{c} + \beta\left(\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}\right)$$
$$= \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{6}\right)\vec{a} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{3}\right)\vec{b} + (1-\beta)\vec{c}.$$

Iz uvjeta okomitosti (skalarni produkt okomitih vektora je 0) dobivamo:

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD} = \left[\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{6}\right)\vec{a} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{3}\right)\vec{b} + (1-\beta)\vec{c}\right] \cdot \left[\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right] = 0, \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{SE} = \left[\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{6}\right)\vec{a} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{3}\right)\vec{b} + (1-\beta)\vec{c}\right] \cdot \left[\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}\right] = 0. \qquad (4)$$

Iz (3) slijedi $\beta = 6\alpha$ (vidi tablicu).

$\cdot$	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	a^2	$\frac{1}{2}a^2$	0
$\vec{b}$	$\frac{1}{2}a^2$	a^2	0
$\vec{c}$	0	0	$\frac{2}{3}a^2$

Iz (4) i koristeći $\beta = 6\alpha$ dobivamo $\alpha = \frac{16}{105}$, $\beta = \frac{96}{105}$. Tada je $\overrightarrow{PQ} = \frac{8}{35}\vec{a} - \frac{8}{35}\vec{b} + \frac{3}{35}\vec{c}$. Ostalo je još jedino izračunati $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$.

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\left(\frac{8}{35}\vec{a} - \frac{8}{35}\vec{b} + \frac{3}{35}\vec{c}\right)^2} = \frac{1}{35}\sqrt{\left(8\vec{a} - 8\vec{b} + 3\vec{c}\right)^2}$$
$$= \frac{a}{35}\sqrt{64 + 64 + 9\cdot\frac{2}{3} - 2\cdot 8\cdot 8\cdot\frac{1}{2}} = \frac{a}{35}\sqrt{70}.$$

Zadaci za vježbu

1. Točka P je polovište brida $\overline{BC}$ kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Odredi udaljenost pravaca BD i B_1P ako je duljina brida kocke jednaka a.

2. Osnovka trostrane prizme $ABCA_1B_1C$ jednakostraničan je trokut ABC stranice a. Bočni brid $\overline{AA_1}$ zatvara s bridovima $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ jednake kutove veličine α. Kolika je udaljenost bridova $\overline{AA_1}$ i $\overline{BC}$?

3. U prostoru su dane točke $A(2,1,3)$, $B(3,1,5)$, $C(3,3,1)$, $D(3,0,-2)$. Nađi udaljenost mimoilaznih pravaca $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$.

4. U trostranoj piramidi nasuprotni mimoilazni bridovi su međusobno jednaki i njihove duljine iznose a, b i c. Nađi udaljenost između svakog para mimoilaznih bridova.

5. Polumjer osnovke jednakostraničnog (v=2R) uspravnog valjka je R. Točka na kružnici gornje osnovke spojena je s točkom kružnice donje osnovke tako da ta spojnica s ravninom osnovke zatvara kut α ($\alpha \geq 45°$). Kolika je najkraća udaljenost spojnice ovih dviju točaka od osi valjka?

LITERATURA

1/ B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 3 – Analitička Geometrija*, Element, Zagreb, 1999.

2/ M. L. Krajzman, *Udaljenost između mimoilaznih pravaca*, Kvant, 1972, br. 11

3/ N. Elezović, *Matematika 2 – udžbenik za 2. razred gimnazije*, Element, Zagreb, 1996.

4/ B. Dakić, *Matematika 2 – zbirka zadataka za 2. razred gimnazije*, Element, Zagreb, 1996.